
Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin. Montag, den 20.1.2003 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Pattern Matching (20 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es darum den Algorithmus zum Pattern Matching für Strings auf Matrizen (d.h. Pattern Matching für Grafiken) zu übertragen.

Gegeben. Matrizen $N \in \{0, 1\}^{n,n}$ und $M \in \{0, 1\}^{m,m}$.

Gefragt. Kommt M in N vor?

Benutzen Sie die Ideen aus dem Algorithmus der Vorlesung für den eindimensionalen Fall und konstruieren sie einen Monte-Carlo Algorithmus für obiges Problem, der Laufzeit $O(n^2 + m^2)$ und Platzbedarf $O(n)$ hat.

Aufgabe 2 Gleichheit von Multimengen (10 Punkte)

Wir betrachten das Problem zu entscheiden, ob zwei gegebene, gleichmächtige *Multimengen* aus ganzen Zahlen S und T gleich sind, d.h. jede ganze Zahl gleichhäufig in beiden Mengen enthalten ist. Dieses Problem kann in Zeit $O(n \log n)$ gelöst werden, indem beide Mengen sortiert und elementweise verglichen werden. (Dabei bezeichnet n die Anzahl der Elemente in einer der Mengen). Konstruieren Sie einen randomisierten Algorithmus zur Entscheidung dieses Problems, indem Sie es auf die Verifizierung von Polynomidentitäten zurückführen.

Aufgabe 3 Verifizierung von Polynomidentitäten (10 Punkte)

Erinnern Sie sich an folgenden Satz aus der Vorlesung.

Theorem 3 *Seien A, B, C jeweils $n \times n$ Matrizen über einem Körper \mathbb{K} mit $AB \neq C$. Dann gilt für einen zufällig aus $\{0, 1\}^n$ gewählten Vektor r $\mathbb{P}[ABr = Cr] \leq \frac{1}{2}$.*

Zeigen Sie, daß obiger Satz nur ein Spezialfall des Satzes von Schwarz-Zippel ist, indem sie zu $n \times n$ Matrizen A, B, C ein multivariates Polynom Q konstruieren, so daß genau dann $Q \equiv 0$ gilt, wenn $AB = C$ ist.

Theorem 4 (Schwarz-Zippel) *Sei $Q(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ein multivariates Polynom mit Gesamtgrad höchstens d . Sei $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{K}$ fest gewählt und $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{S}$ zufällig gezogen. Dann gilt $\mathbb{P}[Q(r_1, \dots, r_n) = 0 \mid Q(x_1, \dots, x_n) \neq 0] \leq \frac{d}{|\mathbb{S}|}$.*

Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza

Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offerma@in.tum.de