

Aufgabe 1 (Royal Flush)

Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \{T : T \subset \{1, 2, \dots, 52\}, |T| = 5\}$$
$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$
$$\Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|} \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

Ereignis $R \subset \Omega$: „Royal Flush einer Farbe“

Es gibt genau 4 Royal Flushs; für jede der Farben Caro, Herz, Kreuz, Pik genau einen.

$$\Pr[R] = \frac{4}{\binom{52}{5}}$$

Ereignis $H \subset \Omega$: „Letzte Karte ist Herz-Ass“

$$\Pr[H] = \frac{\binom{1}{1} \binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}$$

Uns interessiert $\Pr[R | H]$

$$\begin{aligned} \Pr[R | H] &= \frac{\Pr[R \cap H]}{\Pr[H]} = \frac{\Pr[H | R] \Pr[R]}{\Pr[H]} = \\ &= \frac{\frac{1}{4} \frac{4}{\binom{52}{5}}}{\frac{\binom{1}{1} \binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}} = \frac{1}{\binom{51}{4}} = \frac{13}{5} \Pr[R] \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Gezinkte Münzen)

Ereignisse

K : Kopf

K_j : Im j -ten Wurf Kopf

M_k : Münze k gewählt $k = 1, 2, 3$

Wahrscheinlichkeiten

$$\Pr[K | M_1] = \Pr[K_j | M_1] = \frac{1}{3}$$

$$\Pr[K | M_2] = \Pr[K_j | M_2] = \frac{2}{3}$$

$$\Pr[K | M_3] = \Pr[K_j | M_3] = 1$$

$$\Pr[M_k] = \frac{1}{3}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten für $\Pr[M_k | K_1]$ $k = 1, 2, 3$

Satz von Bayes bzw. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit liefert:

$$\begin{aligned}\Pr[M_k | K_1] &= \frac{\Pr[M_k \cap K_1]}{\Pr[K_1]} = \\ &= \frac{\Pr[K_1 | M_k] \Pr[M_k]}{\sum_{k=1}^3 \Pr[K_1 | M_k] \Pr[M_k]}\end{aligned}$$

Einsetzen der Wahrscheinlichkeiten:

$$\Pr[M_1 | K_1] = \frac{1}{6} \quad \Pr[M_2 | K_1] = \frac{1}{3} \quad \Pr[M_3 | K_1] = \frac{1}{2}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit für $\Pr[K_2 | K_1]$

$$\begin{aligned}\Pr[K_2 | K_1] &= \frac{\Pr[K_1 \cap K_2]}{\Pr[K_1]} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^3 \Pr[K_1 \cap K_2 | M_k] \Pr[M_k]}{\sum_{k=1}^3 \Pr[K_1 | M_k] \Pr[M_k]} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^3 \Pr[K | M_k]^2 \Pr[M_k]}{\sum_{k=1}^3 \Pr[K | M_k] \Pr[M_k]} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + 1^2 \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (ZmZ und ZoZ)

(1) Erwartungswerte

Die Erwartungswerte für S_{ZmZ} und S_{ZoZ} sind gleich:

$$\mathbb{E}[S_{ZmZ}] = \mathbb{E}[S_{ZoZ}] = \frac{1}{2}k(n+1)$$

Im Erwartungswert spielen die Abhängigkeiten durch ZoZ keine Rolle!

Frage: Kann man S_{ZmZ} als Approximation für S_{ZoZ} verwenden?

Denn mit S_{ZmZ} rechnet es sich leichter als mit S_{ZoZ} .

Betrachten wir die Varianzen.

(2) **Varianzen**

Für die Varianzen gilt:

$$\text{Var}[S_{ZmZ}] = \frac{1}{12}k(n+1)(n-1) \geq \frac{1}{12}k(n+1)(n-k) = \text{Var}[S_{ZoZ}]$$

Intuition: Die erwartete Abweichung vom Erwartungswert ist bei S_{ZmZ} immer größer als bei S_{ZoZ} .

Aber für „kleine“ k gilt

$$\text{Var}[S_{ZmZ}] \approx \text{Var}[S_{ZoZ}].$$

Antwort: Also kann man für „kleine“ k S_{ZmZ} als Approximation für S_{ZoZ} verwenden.