

---

## Diskrete Strukturen II

---

### Aufgabe 1 (Schärfe der Markov-Ungleichung)

Zeigen Sie, dass die Markov-Ungleichung in folgendem Sinne scharf ist: Geben Sie für jedes  $t \in \mathbb{N}$  jeweils eine positive Zufallsvariable  $X$  an, so dass gilt

$$\Pr[X \geq t] = \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

### Aufgabe 2 (Lastverteilung)

Angenommen wir haben  $m$  Jobs die wir auf  $n$  Rechner in einem Rechnernetz verteilen wollen, wobei zusätzlich  $m > n$  gilt. Wir entscheiden uns für folgende Strategie: jeder der  $m$  Jobs wird unabhängig und gleichwahrscheinlich einem der  $n$  Rechner zugewiesen. Wir untersuchen die Zufallsvariablen

$$X_i = \text{Anzahl der Jobs im } i\text{-ten Rechner}$$

für  $i = 1, \dots, n$  und  $X = \max\{X_i : i = 1, \dots, n\}$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Chernoff-Schranke und der Booleschen Ungleichung

$$\Pr\left[X \geq \frac{m}{n} + \sqrt{6 \frac{m}{n} \ln n}\right] \leq \frac{1}{n}.$$

### Aufgabe 3 (Verhältnis geometrisch verteilter Zufallsvariablen)

Seien  $X \sim \text{Geo}(p_X)$  und  $Y \sim \text{Geo}(p_Y)$  unabhängig und  $R = \frac{X}{Y}$ . Berechnen Sie

- (a)  $\Pr[R > 1]$  und
- (b)  $\Pr\left[R = \frac{m}{n}\right]$  für teilerfremde Zahlen  $m, n \in \mathbb{N}$ .

### Aufgabe 4 (Chernoff für Summen geometrischer Zufallsvariablen)

Seien  $X_i \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$  unabhängig für  $i = 1, \dots, n$  und  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , sowie  $\mu = \mathbb{E}[X]$ . Zeigen Sie analog zum Beweis der Chernoff-Schranke<sup>1</sup>

$$\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq \left(\frac{(1 + \delta)^{1 + \delta}}{\sqrt{(1 + 2\delta)^{1 + 2\delta}}}\right)^{2n}.$$

---

<sup>1</sup>Sollten Sie dabei eine kompliziertere Funktion ableiten wollen, hilft Ihnen Maple mit dem `diff` Befehl Papier zu sparen.