Diskrete Strukturen II

Zentralübung

Hanjo Täubig Sebastian Wernicke

28.05.2004

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 18.06.2004: MW 1801
- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801

Hinweise zur Zwischenklausur

- Termin: Samstag, 05.06.2004
- Beginn: 9:00 Uhr
- Dauer: 2 Stunden (120 Minuten)
- Ort: MW 0001 und MW 2001
  (Gebäude der Fakultät Maschinenwesen)
- Hilfsmittel: 1 beidseitig handbeschriebenes A4-Blatt
- Wertung: 50% der Gesamtnote
- Anmeldung (bis einschließlich Mittwoch):
  https://grundstudium.in.tum.de/
  (Achtung, die alten Zertifikate sind abgelaufen!)

Aufgabe 1

Eine positivwertige Zufallsvariable X heisst *gedächtnislos*, wenn für alle $s, t > 0$ gilt:

$$\Pr[x > s + t \mid x > t] = \Pr[x > s]$$

Zeigen Sie, dass eine diskrete Zufallsvariable genau dann gedächtnislos ist, wenn sie geometrisch verteilt ist.

Aufgabe 1

"geometrisch verteilt $\Rightarrow$ gedächtnislos"

$$
\begin{aligned}
\Pr[x > s + t \mid x > t] &= \frac{Pr[x > s + t \;\wedge\; x > t]}{Pr[x > t]} \\
&= \frac{Pr[x > s + t]}{Pr[x > t]} \\
&= \frac{\sum_{k=s+t+1} p^{k-1}(1-p)}{\sum_{k=t+1} p^{k-1}(1-p)} \\
&= \frac{p^{s+t}}{p^t} = p^s \\
&= \sum_{k=s+1} p^k(1-p) \\
&= \Pr[x > s]
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1

"gedächtnislos $\Rightarrow$ geometrisch verteilt"

$$
\begin{aligned}
\Pr[x > s + t \mid x > t] &= \Pr[x > s] \\
\Pr[x > s + t \;\wedge\; x > t] / \Pr[x > t] &= \Pr[x > s] \\
\Pr[x > s + t] &= \Pr[x > t] \cdot \Pr[x > s]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr[x = s] &= \Pr[x > s - 1] - \Pr[X > s] \\
&= \Pr[x > s - 2] \cdot \Pr[x > 1] - \Pr[x > s - 1] \Pr[x > 1] \\
&= \Pr[x > 1] \cdot (\Pr[x > s - 2] - \Pr[x > s - 1]) \\
&= \Pr[x > 1] \cdot (\Pr[x = s - 1]) = \dots \\
&= \Pr[x > 1]^{s-1} \cdot (\Pr[x = 1]) \\
&= \Pr[x > 1]^{s-1} \cdot (1 - \Pr[x > 1])
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Wir machen n Würfe mit einem Paar fairer Würfel.
Zeigen Sie, dass für große n die Summe aller gewürfelten Augen mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit im Intervall $7n \pm 10\sqrt{35n/6}$ liegt.

Aufgabe 2

Die Varianz der Augenzahl X bei einem Wurf beträgt

$$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{1 \le i \le 6} \frac{i^2}{6} - \left(\sum_{1 \le i \le 6} \frac{i}{6} \right)^2 = \frac{35}{12}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Würfe ergibt sich für die Varianz der Summe Y bei n Würfen von je zwei Würfeln

$$\mathrm{Var}(Y) = 2n\mathrm{Var}(X) = \frac{35}{6}n$$

Mit Hilfe der Chebyshevschen Ungleichung folgern wir hieraus

$$\Pr[(Y - \mathbb{E}(Y))^2 \ge \alpha] = \Pr[|Y - \mathbb{E}(Y)| \ge \sqrt{\alpha}] \le \frac{35}{6}n \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \Pr[|Y - \mathbb{E}(Y)| \ge 10\sqrt{35n/6}] \le \frac{35}{6}n \cdot \frac{1}{\left(10\sqrt{35n/6}\right)^2} = \frac{1}{100}.$$

Aufgabe 3

Seien $F(z)$ und $G(z)$ wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen für zwei Zufallsvariablen.
Für eine Zufallsvariable X mit Wertebereich aus $\mathbb{N}_0$ ist die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$G_X(s) = \sum_{k \geq 0} \Pr[X = k] \cdot s^k$$

Sei $H(z) = F(G(z))$.

a) Drücken Sie $\mathbb{E}(H)$ und $\mathrm{Var}(H)$ durch H aus.

b) Drücken Sie $\mathbb{E}(H)$ und $\mathrm{Var}(H)$ durch $\mathbb{E}(F)$, $\mathrm{Var}(F)$, $\mathbb{E}(G)$ und $\mathrm{Var}(G)$ aus.

Aufgabe 3

Es gilt

$$\mathbb{E}(H) = H'(1)$$

und

$$\mathrm{Var}(H) = H''(1) + H'(1) - H'(1)^2$$

Durch die Kettenregel gilt

$$H'(z) = G'(z)F'(G(z))$$

und

$$H''(z) = G''(z)F'(G(z)) + G'(z)^2 F''(G(z))$$

und damit

$$\mathbb{E}(H) = H'(1) = G'(1)F'(\underbrace{G(1)}_{=1}) = \mathbb{E}(G) \cdot \mathbb{E}(F).$$

Aufgabe 3

Ferner gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(H) &= H''(1) + H'(1) - H'(1)^2 \\
&= G''(1)F'(G(1)) + G'(1)^2 F''(G(1)) + H'(1) - (H'(1))^2 \\
&= G''(1)\mathbb{E}(F) + \mathbb{E}(G)^2 F''(1) + \mathbb{E}(G)\cdot\mathbb{E}(F) \\
&\quad -(\mathbb{E}(G)\cdot\mathbb{E}(F))^2 \\
&= G''(1)\mathbb{E}(F) + \mathbb{E}(G)^2 F''(1) + \mathbb{E}(G)\cdot\mathbb{E}(F) \\
&\quad -(\mathbb{E}(G)\cdot\mathbb{E}(F))^2 + \mathbb{E}(G)^2\mathbb{E}(F) - \mathbb{E}(G)^2\mathbb{E}(F) \\
&= \mathbb{E}(G)^2\cdot(F''(1) + \mathbb{E}(F) - \mathbb{E}(F)^2) \\
&\quad +\mathbb{E}(F)\cdot(G''(1) + \mathbb{E}(G) - \mathbb{E}(G)^2) \\
&= \mathrm{Var}(F)\cdot\mathbb{E}(G)^2 + \mathbb{E}(F)\mathrm{Var}(G)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Bemerkung:
Wir können die Zufallsvariable, die H zugrunde liegt, wie folgt interpretieren:

- Zunächst bestimmen wir eine Zahl n nach der Verteilung F und
- addieren dann die Ergebisse aus n nach G verteilten Zufallsexperimenten.

Aufgabe 4

Seien $X_1, \ldots, X_{2n}$ unabhängige Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung.
Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Pr\left[\left|\frac{X_1 + \cdots + X_{2n}}{2n} - \alpha\right| \leq \left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \alpha\right|\right] \geq \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4

Sei $Y := \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ und $Z := \frac{X_{n+1}+\cdots+X_{2n}}{n}$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\left|\frac{X_1+\cdots+X_{2n}}{2n}-\alpha\right| \leq \left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\alpha\right|\right] &= \\
\Pr\left[\left|\frac{Y+Z}{2}-\alpha\right| \leq |Y-\alpha|\right] &\geq \\
\Pr\left[\left|\frac{Y-\alpha}{2}\right| + \left|\frac{Z-\alpha}{2}\right| \leq |Y-\alpha|\right] &= \\
\Pr\left[|Z-\alpha| \leq |Y-\alpha|\right] &\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bemerken Sie, dass sogar

$$\Pr[|Z-\alpha| < |Y-\alpha|] \geq \frac{1}{2}$$

und wir wegen $\Pr[Y = Z] > 0$ deshalb sogar das stärkere Resultat

$$\Pr\left[\left|\frac{X_1+\cdots+X_{2n}}{2n}-\alpha\right| \leq \left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\alpha\right|\right] > \frac{1}{2}$$

zeigen können.

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 18.06.2004: MW 1801
- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801