WS 2003/04

Diskrete Strukturen I

Ernst W. Mayr

mayr@in.tum.de
Institut für Informatik
Technische Universität München

12-05-2003

Untermengen

Definition (Binomialkoeffizienten)

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{0} &:= 1 && \forall n \in \mathbb{N}_0\\
\binom{n}{k} &:= 0 && n < k, n, k \in \mathbb{N}_0\\
\binom{n}{k} &:= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} && \text{sonst} \quad (n, k \in \mathbb{N}_0)
\end{aligned}
$$

Satz

Sei N eine Menge mit $|N| = n$ Elementen. Die Menge aller k-elementigen Untermengen von N wird bezeichnet mit

$$\binom{N}{k} .$$

Es gilt:

$$\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{|N|}{k} = \binom{n}{k} .$$

Beweis

Seien $n, k \geq 1$, $a \in \mathbb{N}$.

1. $$\binom{n}{0} \text{ und } k > n \text{ sind klar.}$$

2. Definiere

$$\begin{aligned} S_a &:= \left\{A \in \binom{N}{k};\ a \in A\right\}, \\ \tilde{S}_a &:= \left\{A \in \binom{N}{k};\ a \notin A\right\}. \end{aligned}$$

Beweis

Seien $n, k \geq 1$, $a \in \mathbb{N}$.

1. $$\binom{n}{0} \text{ und } k > n \text{ sind klar.}$$

2. Definiere

$$\begin{aligned} S_a &:= \left\{ A \in \binom{N}{k};\ a \in A \right\}, \\ \tilde{S}_a &:= \left\{ A \in \binom{N}{k};\ a \notin A \right\}. \end{aligned}$$

1. Damit gilt

$$S_a \cup \tilde{S}_a = \binom{N}{k}, S_a \cap \tilde{S}_a = \emptyset.$$

$$|S_a| = \left|\binom{N \setminus \{a\}}{k-1}\right| = \binom{n-1}{k-1} \quad \text{(per Induktion)}$$

$$|\tilde{S}_a| = \left|\binom{N \setminus \{a\}}{k}\right| = \binom{n-1}{k} \quad \text{(per Induktion)}$$

Daraus folgt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

q. e. d.

1. Damit gilt

$$S_a \cup \tilde{S}_a = \binom{N}{k},\ S_a \cap \tilde{S}_a = \emptyset.$$

$$|S_a| = \left|\binom{N \setminus \{a\}}{k-1}\right| = \binom{n-1}{k-1} \quad \text{(per Induktion)}$$

$$|\tilde{S}_a| = \left|\binom{N \setminus \{a\}}{k}\right| = \binom{n-1}{k} \quad \text{(per Induktion)}$$

Daraus folgt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

q. e. d.

1. Damit gilt

$$S_a \cup \tilde{S}_a = \binom{N}{k}, S_a \cap \tilde{S}_a = \emptyset.$$

$$|S_a| = \left|\binom{N \setminus \{a\}}{k-1}\right| = \binom{n-1}{k-1} \quad \text{(per Induktion)}$$

$$|\tilde{S}_a| = \left|\binom{N \setminus \{a\}}{k}\right| = \binom{n-1}{k} \quad \text{(per Induktion)}$$

Daraus folgt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

q. e. d.

1. Damit gilt

$$S_a \cup \tilde{S}_a = \binom{N}{k}, S_a \cap \tilde{S}_a = \emptyset.$$

$$|S_a| = \left|\binom{N \setminus \{a\}}{k-1}\right| = \binom{n-1}{k-1} \quad \text{(per Induktion)}$$

$$|\tilde{S}_a| = \left|\binom{N \setminus \{a\}}{k}\right| = \binom{n-1}{k} \quad \text{(per Induktion)}$$

Daraus folgt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

q. e. d.

Zwischenbemerkung zur Nomenklatur:

Zwischenbemerkung zur Nomenklatur:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$$

Partitionen von Mengen und Zahlen

Ungeordnete Partitionen

1. Mengenpartitionen Sei N eine Menge der Kardinalität n und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Zerlegung von N in k nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen heißt eine k-Partition von N. Die einzelnen Teilmengen heißen auch Klassen. Ihre Anzahl wird mit

$$S_{n,k}$$

bezeichnet (die sog. *Stirling-Zahlen der 2. Art*).

Beispiel

$N = \{1,2,3,4,5\},\ k = 2$

$$
\begin{array}{ll}
\{1\} \cup \{2,3,4,5\} & \{1,2\} \cup \{3,4,5\} \\
\{2\} \cup \{1,3,4,5\} & \{1,3\} \cup \{2,4,5\} \\
\{3\} \cup \{1,2,4,5\} & \{1,4\} \cup \{2,3,5\} \\
\{4\} \cup \{1,2,3,5\} & \{1,5\} \cup \{2,3,4\} \\
\{5\} \cup \{1,2,3,4\} & \{2,3\} \cup \{1,4,5\} \\
 & \{2,4\} \cup \{1,3,5\} \\
 & \{2,5\} \cup \{1,3,4\} \\
 & \{3,4\} \cup \{1,2,5\} \\
 & \{3,5\} \cup \{1,2,4\} \\
 & \{4,5\} \cup \{1,2,3\}
\end{array}
$$

$\Rightarrow S_{5,2} = 15.$

Weiter gilt: $S_{n,1} = 1, S_{n,2} =$ Übung, $S_{n,n} = 1$

Beispiel

$N = \{1,2,3,4,5\},\ k = 2$

$$
\begin{array}{ll}
\{1\} \cup \{2,3,4,5\} & \{1,2\} \cup \{3,4,5\} \\
\{2\} \cup \{1,3,4,5\} & \{1,3\} \cup \{2,4,5\} \\
\{3\} \cup \{1,2,4,5\} & \{1,4\} \cup \{2,3,5\} \\
\{4\} \cup \{1,2,3,5\} & \{1,5\} \cup \{2,3,4\} \\
\{5\} \cup \{1,2,3,4\} & \{2,3\} \cup \{1,4,5\} \\
 & \{2,4\} \cup \{1,3,5\} \\
 & \{2,5\} \cup \{1,3,4\} \\
 & \{3,4\} \cup \{1,2,5\} \\
 & \{3,5\} \cup \{1,2,4\} \\
 & \{4,5\} \cup \{1,2,3\}
\end{array}
$$

$\Rightarrow S_{5,2} = 15.$

Weiter gilt: $S_{n,1} = 1, S_{n,2} =$ Übung, $S_{n,n} = 1$

2. Zahlenpartitionen Sei

$$\mathbb{N}_0 \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

mit $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$. Eine solche Zerlegung heißt *k-Partition der Zahl n. Die Anzahl aller k-Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ wird mit*

$$P_{n,k}$$

bezeichnet.

2. Zahlenpartitionen Sei

$$\mathbb{N}_0 \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

mit $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$. Eine solche Zerlegung heißt *k-Partition der Zahl n*. *Die Anzahl aller k-Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ wird mit*

$$P_{n,k}$$

bezeichnet.

2. Zahlenpartitionen Sei

$$\mathbb{N}_0 \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

mit $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$. Eine solche Zerlegung heißt *k-Partition der Zahl n. Die Anzahl aller k-Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ wird mit*

$$P_{n,k}$$

bezeichnet.

Beispiel

$n = 8,\ k = 4.$

$$\begin{aligned} 8 &= 5+1+1+1\\ &= 4+2+1+1\\ &= 3+3+1+1\\ &= 3+2+2+1\\ &= 2+2+2+2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P_{8,4} = 5$

Geordnete Partitionen

1. Mengenpartitionen

Seien N, n, k wie vorher. Eine *geordnete* k-Menge $\subseteq N$ heißt k-Permutation aus N. Ihre Anzahl ist

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = n^{\underline{k}}$$

(*"n hoch k fallend", "fallende Fakultät"*). *Analog:*

$$n^{\overline{k}} := n \cdot (n+1) \cdots (n+k-1)$$

Geordnete Partitionen

1. Mengenpartitionen

Seien N, n, k wie vorher. Eine *geordnete* k-Menge $\subseteq N$ heißt k-Permutation aus N. Ihre Anzahl ist

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = n^{\underline{k}}$$

("n hoch k fallend", "fallende Fakultät"). Analog:

$$n^{\overline{k}} := n \cdot (n+1) \cdots (n+k-1)$$

Überlegung: Jede k-Menge aus N ergibt $k!$ k-Permutationen. Also

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n^{\underline{k}}$$

oder:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Eine k-Mengenpartition ergibt

$$k! \cdot S_{n,k}$$

geordnete k-Mengenpartitionen (Die Klassen sind *untereinander geordnet, aber nicht in sich!*).

Überlegung: Jede k-Menge aus N ergibt $k!$ k-Permutationen. Also

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n^{\underline{k}}$$

oder:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Eine k-Mengenpartition ergibt

$$k! \cdot S_{n,k}$$

geordnete k-Mengenpartitionen (Die Klassen sind *untereinander geordnet, aber nicht in sich!*).

Überlegung: Jede k-Menge aus N ergibt $k!$ k-Permutationen. Also

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n^{\underline{k}}$$

oder:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Eine k-Mengenpartition ergibt

$$k! \cdot S_{n,k}$$

geordnete k-Mengenpartitionen (Die Klassen sind *untereinander geordnet, aber nicht in sich!*).

2. Zahlpartitionen

$$\mathbb{N} \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k; \quad n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

Betrachte folgende graphische Darstellung:

$$\underbrace{\bullet \,|\, \bullet \,|\, \bullet \,|\, \bullet \cdots \bullet \,|\, \bullet \,|\, \bullet \,|\, \bullet}_{n}$$

Wähle aus den $n-1$ Trennstellen $k-1$ aus. Jede der $\binom{n-1}{k-1}$ Wahlmöglichkeiten ergibt eine eindeutig bestimmte geordnete k-Zahlpartition und umgekehrt. Ihre Anzahl ist also

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

2. Zahlpartitionen

$$\mathbb{N} \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k; \quad n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

Betrachte folgende graphische Darstellung:

$$\underbrace{\bullet | \bullet | \bullet | \bullet \cdots \bullet | \bullet | \bullet | \bullet}_{n}$$

Wähle aus den $n-1$ Trennstellen $k-1$ aus. Jede der $\binom{n-1}{k-1}$ Wahlmöglichkeiten ergibt eine eindeutig bestimmte geordnete k-Zahlpartition und umgekehrt. Ihre Anzahl ist also

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

2. Zahlpartitionen

$$\mathbb{N} \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k; \quad n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

Betrachte folgende graphische Darstellung:

$$\underbrace{\bullet| \bullet | \bullet | \bullet \cdots \bullet | \bullet | \bullet |\bullet}_{n}$$

Wähle aus den $n-1$ Trennstellen $k-1$ aus. Jede der $\binom{n-1}{k-1}$ Wahlmöglichkeiten ergibt eine eindeutig bestimmte geordnete k-Zahlpartition und umgekehrt. Ihre Anzahl ist also

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

2. Zahlpartitionen

$$\mathbb{N} \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k; \quad n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

Betrachte folgende graphische Darstellung:

$$\underbrace{\bullet | \bullet | \bullet | \bullet \cdots \bullet | \bullet | \bullet | \bullet}_{n}$$

Wähle aus den $n-1$ Trennstellen $k-1$ aus. Jede der $\binom{n-1}{k-1}$ Wahlmöglichkeiten ergibt eine eindeutig bestimmte geordnete k-Zahlpartition und umgekehrt. Ihre Anzahl ist also

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Multimengen

Beispiel

$M := \{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\} \qquad |M| = 7$

Satz

Die Anzahl der k-Multimengen (also Multimengen der Kardinalität k) aus N $(|N| = n)$ ist

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{n!}.$$

Multimengen

Beispiel

$M := \{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\} \qquad |M| = 7$

Satz

Die Anzahl der k-Multimengen (also Multimengen der Kardinalität k) aus N ($|N| = n$) ist

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{n!}.$$

Beweis.

Sei o.B.d.A. $N = \{1, \dots, n\}$. Betrachte eine Multimenge $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ der Kardinalität k. Definiere die Abbildung f:

$$f: \quad \begin{array}{ccll} a_1 & & a_1 & \geq 1 \\ a_2 & & a_2 + 1 & \\ a_3 & & a_3 + 2 & \\ \vdots & \longmapsto & \vdots & \\ a_k & & a_k + k - 1 & \leq n + k - 1 \end{array}$$

Das Bild unter f ist eine *Menge* $\subseteq N$. Die Anzahl der Möglichkeiten auf der rechten Seite beträgt $\binom{n+k-1}{k}$, und die durch f gegebene Zuordnung ist offensichtlich bijektiv. $\square$

Beweis.

Sei o.B.d.A. $N = \{1, \ldots, n\}$. Betrachte eine Multimenge $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ der Kardinalität k. Definiere die Abbildung f:

$$
f: \quad \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ll} a_1 & \geq 1 \\ a_2 + 1 & \\ a_3 + 2 & \\ \vdots & \\ a_k + k - 1 & \leq n + k - 1 \end{array}
$$

Das Bild unter f ist eine *Menge* $\subseteq N$. Die Anzahl der Möglichkeiten auf der rechten Seite beträgt $\binom{n+k-1}{k}$, und die durch f gegebene Zuordnung ist offensichtlich bijektiv. $\square$

Andere Beweisvariante:

Beweis.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 1 & & 0 & 2 & & & & & 1 & & 0 \\
\circ & \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \cdots & \circ & \bullet & \circ \\
1 & 2 & & 3 & 4 & & & & & n-1 & & n
\end{array}
$$

Von $n + k$ Kugeln werden k schwarz gefärbt; die erste darf nicht schwarz gefärbt werden. Also bleiben n weiße Kugeln übrig, darunter die erste. Jede dieser weißen Kugeln zählt nun als sooft ausgewählt, wie unmittelbar rechts davon schwarze Kugeln stehen. Es werden also aus n weißen Kugeln k ausgewählt (mit Wiederholung). $\square$

Andere Beweisvariante:

Beweis.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0&1&&0&2&&&&&1&&0\\ \circ&\circ&\bullet&\circ&\circ&\bullet&\bullet&\circ&\cdots&\circ&\bullet&\circ\\ 1&2&&3&4&&&&&n{-}1&&n\end{array}$$

Von $n + k$ Kugeln werden k schwarz gefärbt; die erste darf nicht schwarz gefärbt werden. Also bleiben n weiße Kugeln übrig, darunter die erste. Jede dieser weißen Kugeln zählt nun als sooft ausgewählt, wie unmittelbar rechts davon schwarze Kugeln stehen. Es werden also aus n weißen Kugeln k ausgewählt (mit Wiederholung). $\square$

Beispiel

Darstellung zu obigem Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\circ & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet \\
1 & & 2 & & & 3 & & 4 & 5 & &
\end{array}$$

Anzahl von Abbildungen

Betrachte Funktionen von N (*Urbildraum*) *nach* R *(Bildraum)*, $|N| = n, |R| = r$ *mit* $n, r \in \mathbb{N}_0$.

Die Anzahl beliebiger Abbildungen $N \to R$ *ist*

$$r^n \, .$$

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $N \to R$ *ist*

$$r^{\underline{n}}.$$

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \to R$ *("geordnete* r*-Mengenpartitionen von* N*") ist*

$$r! \cdot S_{n,r} \, .$$

Anzahl von Abbildungen

Betrachte Funktionen von N (*Urbildraum*) *nach* R (*Bildraum*), $|N| = n, |R| = r$ *mit* $n, r \in \mathbb{N}_0$.

Die Anzahl beliebiger Abbildungen $N \to R$ *ist*

$$r^n \, .$$

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $N \to R$ *ist*

$$r^{\underline{n}}.$$

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \to R$ *("geordnete* r*-Mengenpartitionen von* N*") ist*

$$r! \cdot S_{n,r}.$$

Anzahl von Abbildungen

Betrachte Funktionen von N (*Urbildraum*) *nach* R *(Bildraum)*, $|N| = n, |R| = r$ *mit* $n, r \in \mathbb{N}_0$.

Die Anzahl beliebiger Abbildungen $N \to R$ *ist*

$$r^n \ .$$

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $N \to R$ *ist*

$$r^{\underline{n}}.$$

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \to R$ *("geordnete* r*-Mengenpartitionen von* N*") ist*

$$r! \cdot S_{n,r}.$$

Anzahl von Abbildungen

Betrachte Funktionen von N (*Urbildraum*) *nach* R (*Bildraum*), $|N| = n, |R| = r$ *mit* $n, r \in \mathbb{N}_0$.

Die Anzahl beliebiger Abbildungen $N \to R$ *ist*

$$r^n .$$

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $N \to R$ *ist*

$$r^{\underline{n}}.$$

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \to R$ *("geordnete* r*-Mengenpartitionen von* N*") ist*

$$r! \cdot S_{n,r}.$$

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$= \quad r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \,.$$

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$= \quad r^n = \sum_{A \subseteq R} \# \text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \# \text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \,.$$

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$\begin{aligned} &= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\ &= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\ &= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \,. \end{aligned}$$