Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h.c. Wilfried Brauer

Wintersemester 2004/05
Diskrete Strukturen I
Übungsblatt 8
22. Dezember 2004
Sebastian Wernicke

Diskrete Strukturen I

27. Multinomialkoeffizienten I

a) Seien $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Weiterhin seien $k_1, \ldots, k_m$ nicht-negative ganze Zahlen mit $k_1 + \ldots + k_m = n$. Zeigen Sie, dass es genau

$$C(n; k_1, k_2, \ldots, k_m) := \frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_m!}$$

Abbildungen $f : N \to M$ gibt, so dass $f^{-1}(j) = \{1 \leq i \leq n : f(i) = j\}$ die Mächtigkeit k_j hat ($j = 1, \ldots, m$). Die Zahlen $C(n; k_1, k_2, \ldots, k_m)$ heißen *Multinomial-Koeffizienten.* (Im Falle $m = 2$ erhält man die üblichen Binomial-Koeffizienten).

b) Zeigen Sie, dass mit den Bezeichnungen aus a) gilt:

$$C(n; k_1, \ldots, k_m) = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdots \binom{n-k_1-k_2 \cdots - k_{m-1}}{k_m}.$$

28. Multinomialkoeffizienten II

Zeigen Sie

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} C(n; k_1, \ldots, k_m)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m},$$

wobei sich die Summation über alle Tupel $(k_1, \ldots, k_m)$, $k_i \in \mathbb{N}_0$, mit $k_1 + \ldots + k_m = n$ erstreckt.

29. Gerade im Dreieck

Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k}$ genau dann eine gerade Zahl ist, wenn $\binom{2n}{2k}$ eine gerade Zahl ist. Benutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass es unendlich viele Zeilen im Pascalschen Dreieck gibt, die nur aus ungeraden Zahlen bestehen. (Wenn Sie sich nicht mehr genau daran erinnern, was das Pascalsche Drieck ist: `http://en.wikipedia.org/wiki/Pascals_triangle`)

30. Partielle Summation

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation

a)

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$$

b)

$$\sum_{k=m}^{n} k \cdot \binom{k}{m}$$

(Hinweis für Teilaufgabe b): Es gilt $\Delta_k \binom{k}{m} = \binom{k}{m-1}$.)