

SS 2005

Einführung in die Informatik IV

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2005SS/info4/index.html.de>

25. April 2005

3.3 Äquivalenz von NFA und DFA

Satz 30

Für jede von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten akzeptierte Sprache L gibt es auch einen deterministischen endlichen Automaten M mit

$$L = L(M) .$$

Beweis:

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NFA.



Beweis:

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NFA.

Definiere

- 1 $M' := (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$
- 2 $Q' := \mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\}$ ($\mathcal{P}(Q)$ Potenzmenge von Q)
- 3 $\delta'(Q'', a) := \bigcup_{q' \in Q''} \delta(q', a)$ für alle $Q'' \in Q'$, $a \in \Sigma$
- 4 $q'_0 := S$
- 5 $F' := \{Q'' \subseteq Q; Q'' \cap F \neq \emptyset\}$



Beweis:

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NFA.

Definiere

- 1 $M' := (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$
- 2 $Q' := \mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\}$ ($\mathcal{P}(Q)$ Potenzmenge von Q)
- 3 $\delta'(Q'', a) := \bigcup_{q' \in Q''} \delta(q', a)$ für alle $Q'' \in Q'$, $a \in \Sigma$
- 4 $q'_0 := S$
- 5 $F' := \{Q'' \subseteq Q; Q'' \cap F \neq \emptyset\}$

□

Beweis:

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NFA.

Definiere

- 1 $M' := (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$
- 2 $Q' := \mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\}$ ($\mathcal{P}(Q)$ Potenzmenge von Q)
- 3 $\delta'(Q'', a) := \bigcup_{q' \in Q''} \delta(q', a)$ für alle $Q'' \in Q'$, $a \in \Sigma$
- 4 $q'_0 := S$
- 5 $F' := \{Q'' \subseteq Q; Q'' \cap F \neq \emptyset\}$

□

Beweis:

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NFA.

Definiere

- 1 $M' := (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$
- 2 $Q' := \mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\}$ ($\mathcal{P}(Q)$ Potenzmenge von Q)
- 3 $\delta'(Q'', a) := \bigcup_{q' \in Q''} \delta(q', a)$ für alle $Q'' \in Q'$, $a \in \Sigma$
- 4 $q'_0 := S$
- 5 $F' := \{Q'' \subseteq Q; Q'' \cap F \neq \emptyset\}$



Beweis:

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NFA.

Definiere

- 1 $M' := (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$
- 2 $Q' := \mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\}$ ($\mathcal{P}(Q)$ Potenzmenge von Q)
- 3 $\delta'(Q'', a) := \bigcup_{q' \in Q''} \delta(q', a)$ für alle $Q'' \in Q'$, $a \in \Sigma$
- 4 $q'_0 := S$
- 5 $F' := \{Q'' \subseteq Q; Q'' \cap F \neq \emptyset\}$

□

Beweis:

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NFA.

Definiere

- 1 $M' := (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$
- 2 $Q' := \mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\}$ ($\mathcal{P}(Q)$ Potenzmenge von Q)
- 3 $\delta'(Q'', a) := \bigcup_{q' \in Q''} \delta(q', a)$ für alle $Q'' \in Q'$, $a \in \Sigma$
- 4 $q'_0 := S$
- 5 $F' := \{Q'' \subseteq Q; Q'' \cap F \neq \emptyset\}$



Beweis:

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ ein NFA.

Definiere

- 1 $M' := (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$
- 2 $Q' := \mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\}$ ($\mathcal{P}(Q)$ Potenzmenge von Q)
- 3 $\delta'(Q'', a) := \bigcup_{q' \in Q''} \delta(q', a)$ für alle $Q'' \in Q'$, $a \in \Sigma$
- 4 $q'_0 := S$
- 5 $F' := \{Q'' \subseteq Q; Q'' \cap F \neq \emptyset\}$

Also

NFA N :	Q	Σ	δ	S	F
DFA M' :	2^Q	Σ	δ'	S	F'



Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned}w \in L(N) &\Leftrightarrow \hat{\delta}(S, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(q'_0, w) \in F' \\ &\Leftrightarrow w \in L(M').\end{aligned}$$

□

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned}w \in L(N) &\Leftrightarrow \hat{\delta}(S, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(q'_0, w) \in F' \\ &\Leftrightarrow w \in L(M').\end{aligned}$$

□

Der zugehörige Algorithmus zur Überführung eines NFA in einen DFA heißt **Teilmengenkonstruktion**, **Potenzmengenkonstruktion** oder **Myhill-Konstruktion**.

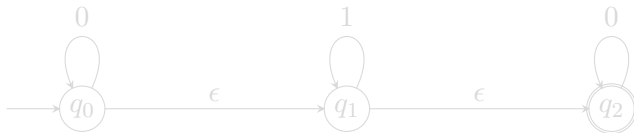
3.4 NFA's mit ϵ -Übergängen

Definition 31

Ein (nichtdeterministischer) endlicher Automat A mit ϵ -Übergängen ist ein 5-Tupel analog zur Definition des NFA mit

$$\delta : Q \times (\Sigma \uplus \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\} .$$

Ein ϵ -Übergang wird ausgeführt, ohne dass ein Eingabezeichen gelesen wird. Wir setzen o.B.d.A. voraus, dass A nur einen Anfangszustand hat.



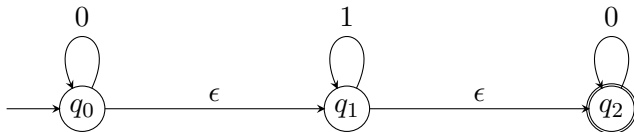
3.4 NFA's mit ϵ -Übergängen

Definition 31

Ein (nichtdeterministischer) endlicher Automat A mit ϵ -Übergängen ist ein 5-Tupel analog zur Definition des NFA mit

$$\delta : Q \times (\Sigma \uplus \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\} .$$

Ein ϵ -Übergang wird ausgeführt, ohne dass ein Eingabezeichen gelesen wird. Wir setzen o.B.d.A. voraus, dass A nur einen Anfangszustand hat.



Definiere für alle $a \in \Sigma$

$$\bar{\delta}(q, a) := \hat{\delta}(q, \epsilon^* a \epsilon^*).$$

Satz 32

$$w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(S, w) \cap F \neq \emptyset.$$

Beweis:
Hausaufgabe!

□

Definiere für alle $a \in \Sigma$

$$\bar{\delta}(q, a) := \hat{\delta}(q, \epsilon^* a \epsilon^*).$$

Satz 32

$$w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(S, w) \cap F \neq \emptyset.$$

Beweis:
Hausaufgabe!



Definiere für alle $a \in \Sigma$

$$\bar{\delta}(q, a) := \hat{\delta}(q, \epsilon^* a \epsilon^*).$$

Satz 32

$$w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(S, w) \cap F \neq \emptyset.$$

Beweis:

Hausaufgabe!



3.5 Entfernen von ϵ -Übergängen

Satz 33

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten A mit ϵ -Übergängen gibt es einen nichtdeterministischen endlichen Automaten A' ohne ϵ -Übergänge, so dass gilt:

$$L(A) = L(A')$$

Beweis:

Ersetze δ durch $\bar{\delta}$ und F durch F' mit

$$F' = \begin{cases} F & \epsilon \notin L(A) \\ F \cup \{q_0\} & \epsilon \in L(A) \end{cases}$$

□

3.5 Entfernen von ϵ -Übergängen

Satz 33

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten A mit ϵ -Übergängen gibt es einen nichtdeterministischen endlichen Automaten A' ohne ϵ -Übergänge, so dass gilt:

$$L(A) = L(A')$$

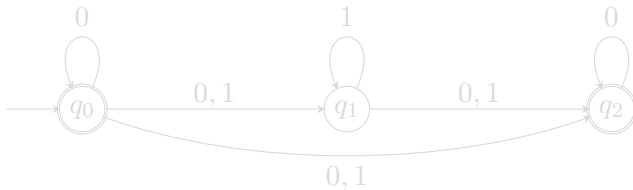
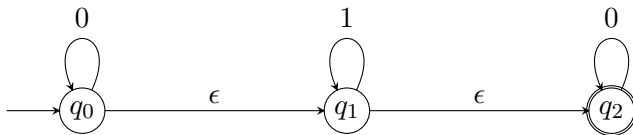
Beweis:

Ersetze δ durch $\bar{\delta}$ und F durch F' mit

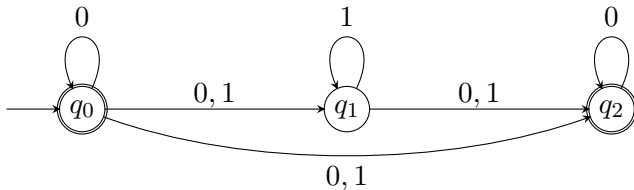
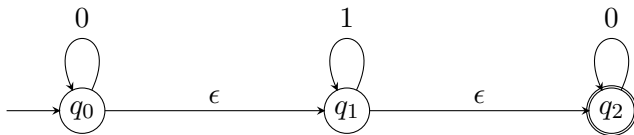
$$F' = \begin{cases} F & \epsilon \notin L(A) \\ F \cup \{q_0\} & \epsilon \in L(A) \end{cases}$$



Beispiel 34



Beispiel 34



3.6 Endliche Automaten und reguläre Sprachen

Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 35

Die Familie der regulären Sprachen (Chomsky-3-Sprachen) ist identisch mit der Familie der Sprachen, die

- *von DFA's erkannt werden,*
- *von NFA's akzeptiert werden,*
- *von NFA's mit ϵ -Übergängen akzeptiert werden.*

Beweis:

Wie soeben gezeigt.



3.6 Endliche Automaten und reguläre Sprachen

Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 35

Die Familie der regulären Sprachen (Chomsky-3-Sprachen) ist identisch mit der Familie der Sprachen, die

- *von DFA's erkannt werden,*
- *von NFA's akzeptiert werden,*
- *von NFA's mit ϵ -Übergängen akzeptiert werden.*

Beweis:

Wie soeben gezeigt.



3.6 Endliche Automaten und reguläre Sprachen

Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 35

Die Familie der regulären Sprachen (Chomsky-3-Sprachen) ist identisch mit der Familie der Sprachen, die

- *von DFA's erkannt werden,*
- *von NFA's akzeptiert werden,*
- *von NFA's mit ϵ -Übergängen akzeptiert werden.*

Beweis:

Wie soeben gezeigt.



3.6 Endliche Automaten und reguläre Sprachen

Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 35

Die Familie der regulären Sprachen (Chomsky-3-Sprachen) ist identisch mit der Familie der Sprachen, die

- *von DFA's erkannt werden,*
- *von NFA's akzeptiert werden,*
- *von NFA's mit ϵ -Übergängen akzeptiert werden.*

Beweis:

Wie soeben gezeigt.



3.6 Endliche Automaten und reguläre Sprachen

Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 35

Die Familie der regulären Sprachen (Chomsky-3-Sprachen) ist identisch mit der Familie der Sprachen, die

- *von DFA's erkannt werden,*
- *von NFA's akzeptiert werden,*
- *von NFA's mit ϵ -Übergängen akzeptiert werden.*

Beweis:

Wie soeben gezeigt.



3.7 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sollen eine kompakte Notation für spezielle Sprachen sein, wobei endliche Ausdrücke hier auch unendliche Mengen beschreiben können.

Definition 36

Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert durch:

- 1. \emptyset ist ein regulärer Ausdruck.
- 2. ϵ ist ein regulärer Ausdruck.
- 3. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck.
- 4. Wenn A und B reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch (A) , (B) , $(A \cup B)$, $(A \cup B)^*$, $(A \cup B)^+$, $(A \cup B)^?$, $(A \cup B)^{>0}$, $(A \cup B)^{<0}$, $(A \cup B)^{>0}$, $(A \cup B)^{<0}$ reguläre Ausdrücke.
- 5. Wenn A ein regulärer Ausdruck ist, dann ist A^* ein regulärer Ausdruck.

3.7 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sollen eine kompakte Notation für spezielle Sprachen sein, wobei endliche Ausdrücke hier auch unendliche Mengen beschreiben können.

Definition 36

Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert durch:

- 1 \emptyset ist ein regulärer Ausdruck.
- 2 ϵ ist ein regulärer Ausdruck.
- 3 Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck.
- 4 Wenn α und β reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch (α) , $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ (hierfür wird oft auch $(\alpha + \beta)$ geschrieben) und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke.
- 5 Nichts sonst ist ein regulärer Ausdruck.

3.7 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sollen eine kompakte Notation für spezielle Sprachen sein, wobei endliche Ausdrücke hier auch unendliche Mengen beschreiben können.

Definition 36

Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert durch:

- 1 \emptyset ist ein regulärer Ausdruck.
- 2 ϵ ist ein regulärer Ausdruck.
- 3 Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck.
- 4 Wenn α und β reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch (α) , $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ (hierfür wird oft auch $(\alpha + \beta)$ geschrieben) und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke.
- 5 Nichts sonst ist ein regulärer Ausdruck.

3.7 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sollen eine kompakte Notation für spezielle Sprachen sein, wobei endliche Ausdrücke hier auch unendliche Mengen beschreiben können.

Definition 36

Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert durch:

- 1 \emptyset ist ein regulärer Ausdruck.
- 2 ϵ ist ein regulärer Ausdruck.
- 3 Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck.
- 4 Wenn α und β reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch (α) , $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ (hierfür wird oft auch $(\alpha + \beta)$ geschrieben) und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke.
- 5 Nichts sonst ist ein regulärer Ausdruck.

3.7 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sollen eine kompakte Notation für spezielle Sprachen sein, wobei endliche Ausdrücke hier auch unendliche Mengen beschreiben können.

Definition 36

Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert durch:

- 1 \emptyset ist ein regulärer Ausdruck.
- 2 ϵ ist ein regulärer Ausdruck.
- 3 Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck.
- 4 Wenn α und β reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch (α) , $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ (hierfür wird oft auch $(\alpha + \beta)$ geschrieben) und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke.
- 5 Nichts sonst ist ein regulärer Ausdruck.

3.7 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sollen eine kompakte Notation für spezielle Sprachen sein, wobei endliche Ausdrücke hier auch unendliche Mengen beschreiben können.

Definition 36

Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert durch:

- 1 \emptyset ist ein regulärer Ausdruck.
- 2 ϵ ist ein regulärer Ausdruck.
- 3 Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck.
- 4 Wenn α und β reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch (α) , $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ (hierfür wird oft auch $(\alpha + \beta)$ geschrieben) und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke.
- 5 **Nichts sonst ist ein regulärer Ausdruck.**

3.7 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sollen eine kompakte Notation für spezielle Sprachen sein, wobei endliche Ausdrücke hier auch unendliche Mengen beschreiben können.

Definition 36

Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert durch:

- 1 \emptyset ist ein regulärer Ausdruck.
- 2 ϵ ist ein regulärer Ausdruck.
- 3 Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck.
- 4 Wenn α und β reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch (α) , $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ (hierfür wird oft auch $(\alpha + \beta)$ geschrieben) und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke.
- 5 Nichts sonst ist ein regulärer Ausdruck.

Zu einem regulären Ausdruck γ ist die zugehörige Sprache $L(\gamma)$ induktiv definiert durch:

Definition 37

- 1 Falls $\gamma = \emptyset$, so gilt $L(\gamma) = \emptyset$.
- 2 Falls $\gamma = \epsilon$, so gilt $L(\gamma) = \{\epsilon\}$.
- 3 Falls $\gamma = a$, so gilt $L(\gamma) = \{a\}$.
- 4 Falls $\gamma = (\alpha)$, so gilt $L(\gamma) = L(\alpha)$.
- 5 Falls $\gamma = \alpha\beta$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta) = \{uv; u \in L(\alpha), v \in L(\beta)\}.$$
- 6 Falls $\gamma = (\alpha \mid \beta)$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta) = \{u; u \in L(\alpha) \vee u \in L(\beta)\}.$$
- 7 Falls $\gamma = (\alpha)^*$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)^* = \{u_1u_2 \dots u_n; n \in \mathbb{N}_0, u_1, \dots, u_n \in L(\alpha)\}.$$

Zu einem regulären Ausdruck γ ist die zugehörige Sprache $L(\gamma)$ induktiv definiert durch:

Definition 37

- 1 Falls $\gamma = \emptyset$, so gilt $L(\gamma) = \emptyset$.
- 2 Falls $\gamma = \epsilon$, so gilt $L(\gamma) = \{\epsilon\}$.
- 3 Falls $\gamma = a$, so gilt $L(\gamma) = \{a\}$.
- 4 Falls $\gamma = (\alpha)$, so gilt $L(\gamma) = L(\alpha)$.
- 5 Falls $\gamma = \alpha\beta$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta) = \{uv; u \in L(\alpha), v \in L(\beta)\}.$$
- 6 Falls $\gamma = (\alpha \mid \beta)$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta) = \{u; u \in L(\alpha) \vee u \in L(\beta)\}.$$
- 7 Falls $\gamma = (\alpha)^*$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)^* = \{u_1u_2 \dots u_n; n \in \mathbb{N}_0, u_1, \dots, u_n \in L(\alpha)\}.$$

Zu einem regulären Ausdruck γ ist die zugehörige Sprache $L(\gamma)$ induktiv definiert durch:

Definition 37

- 1 Falls $\gamma = \emptyset$, so gilt $L(\gamma) = \emptyset$.
- 2 Falls $\gamma = \epsilon$, so gilt $L(\gamma) = \{\epsilon\}$.
- 3 Falls $\gamma = a$, so gilt $L(\gamma) = \{a\}$.
- 4 Falls $\gamma = (\alpha)$, so gilt $L(\gamma) = L(\alpha)$.
- 5 Falls $\gamma = \alpha\beta$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta) = \{uv; u \in L(\alpha), v \in L(\beta)\} .$$
- 6 Falls $\gamma = (\alpha \mid \beta)$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta) = \{u; u \in L(\alpha) \vee u \in L(\beta)\} .$$
- 7 Falls $\gamma = (\alpha)^*$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)^* = \{u_1u_2 \dots u_n; n \in \mathbb{N}_0, u_1, \dots, u_n \in L(\alpha)\} .$$

Zu einem regulären Ausdruck γ ist die zugehörige Sprache $L(\gamma)$ induktiv definiert durch:

Definition 37

- 1 Falls $\gamma = \emptyset$, so gilt $L(\gamma) = \emptyset$.
- 2 Falls $\gamma = \epsilon$, so gilt $L(\gamma) = \{\epsilon\}$.
- 3 Falls $\gamma = a$, so gilt $L(\gamma) = \{a\}$.
- 4 Falls $\gamma = (\alpha)$, so gilt $L(\gamma) = L(\alpha)$.
- 5 Falls $\gamma = \alpha\beta$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta) = \{uv; u \in L(\alpha), v \in L(\beta)\} .$$
- 6 Falls $\gamma = (\alpha \mid \beta)$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta) = \{u; u \in L(\alpha) \vee u \in L(\beta)\} .$$
- 7 Falls $\gamma = (\alpha)^*$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)^* = \{u_1u_2 \dots u_n; n \in \mathbb{N}_0, u_1, \dots, u_n \in L(\alpha)\} .$$

Zu einem regulären Ausdruck γ ist die zugehörige Sprache $L(\gamma)$ induktiv definiert durch:

Definition 37

- 1 Falls $\gamma = \emptyset$, so gilt $L(\gamma) = \emptyset$.
- 2 Falls $\gamma = \epsilon$, so gilt $L(\gamma) = \{\epsilon\}$.
- 3 Falls $\gamma = a$, so gilt $L(\gamma) = \{a\}$.
- 4 Falls $\gamma = (\alpha)$, so gilt $L(\gamma) = L(\alpha)$.

- 5 Falls $\gamma = \alpha\beta$, so gilt

$$L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta) = \{uv; u \in L(\alpha), v \in L(\beta)\} .$$

- 6 Falls $\gamma = (\alpha \mid \beta)$, so gilt

$$L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta) = \{u; u \in L(\alpha) \vee u \in L(\beta)\} .$$

- 7 Falls $\gamma = (\alpha)^*$, so gilt

$$L(\gamma) = L(\alpha)^* = \{u_1 u_2 \dots u_n; n \in \mathbb{N}_0, u_1, \dots, u_n \in L(\alpha)\} .$$

Zu einem regulären Ausdruck γ ist die zugehörige Sprache $L(\gamma)$ induktiv definiert durch:

Definition 37

- 1 Falls $\gamma = \emptyset$, so gilt $L(\gamma) = \emptyset$.
- 2 Falls $\gamma = \epsilon$, so gilt $L(\gamma) = \{\epsilon\}$.
- 3 Falls $\gamma = a$, so gilt $L(\gamma) = \{a\}$.
- 4 Falls $\gamma = (\alpha)$, so gilt $L(\gamma) = L(\alpha)$.
- 5 Falls $\gamma = \alpha\beta$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta) = \{uv; u \in L(\alpha), v \in L(\beta)\} .$$
- 6 Falls $\gamma = (\alpha \mid \beta)$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta) = \{u; u \in L(\alpha) \vee u \in L(\beta)\} .$$
- 7 Falls $\gamma = (\alpha)^*$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)^* = \{u_1u_2 \dots u_n; n \in \mathbb{N}_0, u_1, \dots, u_n \in L(\alpha)\} .$$

Zu einem regulären Ausdruck γ ist die zugehörige Sprache $L(\gamma)$ induktiv definiert durch:

Definition 37

- 1 Falls $\gamma = \emptyset$, so gilt $L(\gamma) = \emptyset$.
- 2 Falls $\gamma = \epsilon$, so gilt $L(\gamma) = \{\epsilon\}$.
- 3 Falls $\gamma = a$, so gilt $L(\gamma) = \{a\}$.
- 4 Falls $\gamma = (\alpha)$, so gilt $L(\gamma) = L(\alpha)$.
- 5 Falls $\gamma = \alpha\beta$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta) = \{uv; u \in L(\alpha), v \in L(\beta)\} .$$
- 6 Falls $\gamma = (\alpha \mid \beta)$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta) = \{u; u \in L(\alpha) \vee u \in L(\beta)\} .$$
- 7 Falls $\gamma = (\alpha)^*$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)^* = \{u_1u_2 \dots u_n; n \in \mathbb{N}_0, u_1, \dots, u_n \in L(\alpha)\} .$$

Zu einem regulären Ausdruck γ ist die zugehörige Sprache $L(\gamma)$ induktiv definiert durch:

Definition 37

- 1 Falls $\gamma = \emptyset$, so gilt $L(\gamma) = \emptyset$.
- 2 Falls $\gamma = \epsilon$, so gilt $L(\gamma) = \{\epsilon\}$.
- 3 Falls $\gamma = a$, so gilt $L(\gamma) = \{a\}$.
- 4 Falls $\gamma = (\alpha)$, so gilt $L(\gamma) = L(\alpha)$.
- 5 Falls $\gamma = \alpha\beta$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta) = \{uv; u \in L(\alpha), v \in L(\beta)\} .$$
- 6 Falls $\gamma = (\alpha \mid \beta)$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta) = \{u; u \in L(\alpha) \vee u \in L(\beta)\} .$$
- 7 Falls $\gamma = (\alpha)^*$, so gilt
$$L(\gamma) = L(\alpha)^* = \{u_1u_2 \dots u_n; n \in \mathbb{N}_0, u_1, \dots, u_n \in L(\alpha)\} .$$

Beispiel 38

Sei das zugrunde liegende Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

- alle Wörter, die gleich 0 sind oder mit 00 enden:

$$(0 \mid (0 \mid 1)^*00)$$

- alle Wörter, die 0110 enthalten:

$$(0|1)^*0110(0|1)^*$$

- alle Wörter, die eine gerade Anzahl von 1'en enthalten:

$$(0^*10^*1)^*0^*$$

- alle Wörter, die die Binärdarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl darstellen, also

$$0, 11, 110, 1001, 1100, 1111, 10010, \dots$$

Beispiel 38

Sei das zugrunde liegende Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

- alle Wörter, die gleich 0 sind oder mit 00 enden:

$$(0 \mid (0 \mid 1)^*00)$$

- alle Wörter, die 0110 enthalten:

$$(0|1)^*0110(0|1)^*$$

- alle Wörter, die eine gerade Anzahl von 1'en enthalten:

$$(0^*10^*1)^*0^*$$

- alle Wörter, die die Binärdarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl darstellen, also

$$0, 11, 110, 1001, 1100, 1111, 10010, \dots$$

Beispiel 38

Sei das zugrunde liegende Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

- alle Wörter, die gleich 0 sind oder mit 00 enden:

$$(0 \mid (0 \mid 1)^*00)$$

- alle Wörter, die 0110 enthalten:

$$(0|1)^*0110(0|1)^*$$

- alle Wörter, die eine gerade Anzahl von 1'en enthalten:

$$(0^*10^*1)^*0^*$$

- alle Wörter, die die Binärdarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl darstellen, also

$$0, 11, 110, 1001, 1100, 1111, 10010, \dots$$

Beispiel 38

Sei das zugrunde liegende Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

- alle Wörter, die gleich 0 sind oder mit 00 enden:

$$(0 \mid (0 \mid 1)^*00)$$

- alle Wörter, die 0110 enthalten:

$$(0|1)^*0110(0|1)^*$$

- alle Wörter, die eine gerade Anzahl von 1'en enthalten:

$$(0^*10^*1)^*0^*$$

- alle Wörter, die die Binärdarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl darstellen, also

0, 11, 110, 1001, 1100, 1111, 10010, ...

Beispiel 38

Sei das zugrunde liegende Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

- alle Wörter, die gleich 0 sind oder mit 00 enden:

$$(0 \mid (0 \mid 1)^*00)$$

- alle Wörter, die 0110 enthalten:

$$(0|1)^*0110(0|1)^*$$

- alle Wörter, die eine gerade Anzahl von 1'en enthalten:

$$(0^*10^*1)^*0^*$$

- alle Wörter, die die Binärdarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl darstellen, also

$$0, 11, 110, 1001, 1100, 1111, 10010, \dots$$

Hausaufgabe!