WS 2005/06

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2005WS/ds/index.html.de

4. November 2005

Ein Beispiel aus der Ramsey-Theorie:

Satz 29

In jeder Menge von 6 Personen gibt es 3 Personen, die sich gegenseitig kennen, oder 3 Personen, von denen keiner die beiden anderen kennt.

Beweis:

$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_6\}$. Betrachte die Abbildung

$$\{2, \ldots, 6\} \to \{0, 1\}$$
$$\{2, \ldots, 6\} \ni i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{„}p_1 \text{ kennt } p_i\text{“} \\ 0 & \text{„}p_1 \text{ kennt } p_i \text{ nicht“} \end{cases}$$

Aus dem verallgemeinerten Schubfachprinzip folgt: Es gibt mindestens 3 Leute $\in \{p_2, \ldots, p_6\}$, die p_1 kennen, oder es gibt mindestens 3 Leute, die p_1 nicht kennen.

Wir betrachten die erste Alternative, die zweite ist analog. O. B. d. A. kennt p_1 p_2, p_3 und p_4.

1. Fall:

$\big(\exists p_i, p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}\big)\big[i \neq j \text{ und } p_i \text{ kennt } p_j\big]$, z. B. $i = 2, j = 4$. Dann erfüllen $\{p_1, p_i, p_j\}$ den ersten Teil der Behauptung.

2. Fall: (Komplement des 1. Falls!)

$\big(\forall p_i, p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}\big)\big[i \neq j \Rightarrow p_i \text{ kennt } p_j \text{ nicht}\big]$. Dann erfüllen $\{p_2, p_3, p_4\}$ den zweiten Teil der Behauptung. □

Beispiel 30 (Indirekter Beweis, Wohlordnungseigenschaft)

Satz 31

Sei S eine endliche Menge $\neq \emptyset$, und sei $f : S \to S$ eine Abbildung von S in S. Dann gilt:

$$(\exists r \in \mathbb{N})[f^r(S) = f(f^r(S))]\,.$$

Dabei ist $f^0 : S \to S$ als die Identität auf S und, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, f^{n+1} als $f \circ f^n$ definiert.

Beweis:

Falls f bijektiv ist, dann erfüllt $r = 1$ die Behauptung. Wir nehmen daher an, dass f nicht bijektiv ist, also $f(S) \subsetneqq S$. Man beachte, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $f^{m+1}(S) \subseteq f^m(S)$!

Weitere Annahme: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $f^{m+1}(S) \subsetneqq f^m(S)$.

In diesem Fall hätte die Menge $\{|f^m(S)|;\ m \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$ kein *kleinstes Element*, da stets $|f^{m+1}(S)| < |f^m(S)|$.
Widerspruch zur Wohlordnungseigenschaft!

Sei also $m \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft

$$f^{m+1}(S) = f^m(S)\ .$$

Dann erfüllt $r = m$ die Behauptung. $\square$

Beispiel 32

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und n ungerade. Dann lässt sich n als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

Beweis:

Falls $n = x^2 - y^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$, dann gilt
$n = (x - y)(x + y)$.
Sei nun $s := x + y$ und $t := x - y$. Dann ist

$$\begin{aligned} s &> t > 0 \\ n &= s \cdot t \\ x &= (s + t)/2 \\ y &= (s - t)/2 \end{aligned}$$

Also müssen s und t beide gerade oder beide ungerade sein.

Da

$$\begin{aligned} s > t > 0 \\ n = s \cdot t \\ x = (s+t)/2 \\ y = (s-t)/2 \end{aligned}$$

kann man für ungerades n stets $s := n$ und $t := 1$ setzen und erhält damit $x = (n+1)/2$ und $y = (n-1)/2$, die die Behauptung erfüllen! $\square$

Bemerkungen:

1. Falls n eine ungerade Primzahl ist, sind s und t eindeutig bestimmt und es gibt genau eine Lösung für x und y.
2. Für allgemeine n kann es mehr als eine Lösung geben, z.B. für $n = 15$

$$s = 5, t = 3 \text{ und } 15 = 16 - 1\,, \text{ oder}$$
$$s = 15, t = 1 \text{ und } 15 = 64 - 49\,.$$

3. Auch für gerade n kann es Lösungen geben, z.B.

$$8 = 9 - 1$$
$$48 = 7^2 - 1^2$$
$$48 = 8^2 - 4^2$$

4.7 Einige Sprechweisen

1. Wir sagen
„Eine Bedingung/Eigenschaft A ist hinreichend für eine Eigenschaft B“,
falls
$$A \Rightarrow B\,.$$
2. Wir sagen
„Eine Bedingung/Eigenschaft A ist notwendig für eine Eigenschaft B“,
falls
$$A \Leftarrow B \text{ (bzw. } B \Rightarrow A \text{)}\,.$$
3. Wir sagen
„Eine Bedingung/Eigenschaft A ist notwendig und hinreichend für eine Eigenschaft B“,
falls
$$A \Leftrightarrow B \text{ (bzw. } A \equiv B \text{)}\,.$$

4.8 Folgen und Grenzwerte

R bezeichne einen Bereich wie z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}_0$, oder $\mathbb{Z}$.

Definition 33

1. Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Eine endliche Folge reeller (bzw. rationaler, natürlicher, ganzer) Zahlen
$$(a_i)_{0 \le i \le k}$$
ist eine Abbildung
$$\{0, 1, \ldots, k\} \ni i \mapsto a_i \in R\,.$$
2. Eine unendliche Folge
$$(a_n)_{n \ge 0}$$
ist eine Abbildung
$$\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto a_n \in R\,.$$

Sei $(a_n)_{n\ge 0}$ eine reelle Folge.

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen
„Die Folge $(a_n)_{n\ge 0}$ konvergiert für $n \to \infty$ nach a",
und schreiben
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$
falls gilt:
$$(\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_\epsilon)[|a_n - a| < \epsilon]\,.$$

2. Wir sagen
„Die Folge $(a_n)_{n\ge 0}$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $+\infty$",
und schreiben
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\,,$$
falls gilt:
$$(\forall M \in \mathbb{N}\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_M)[a_n > M]\,.$$

Beispiel 34

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $a_n := \frac{1}{n} \sin n$.
Behauptung:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (für $n \to \infty$) gegen 0.

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, $N > \epsilon^{-1}$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n}|\sin n| \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{N} < \epsilon\,.$$

$\square$

Bemerkungen:

1. Falls es für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$

so sagen wir, „die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ divergiert für $n \to \infty$".

2. Konvergenz gegen $-\infty$ wird entsprechend definiert.
3. Für Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to R$ wird das Konvergenzverhalten (bzw. $\lim_{n\to\infty} f(n)$) analog definiert (indem man die Folge $(f(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ betrachtet!).

4.9 Das Wachstumsverhalten von Funktionen

Die Groß-O-Notation wurde von D. E. Knuth in der Algorithmenanalyse eingeführt. Sie wurde ursprünglich von Paul Bachmann (1837–1920) entwickelt und von Edmund Landau (1877–1938) in seinen Arbeiten verbreitet.

Definition 35 (Groß-O-Notation)

- $f(n) \in \mathcal{O}\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad \big[|f(n)| \leq c \cdot g(n)\big]$$

„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht schneller als g“

- $f(n) \in o\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\ c > 0$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad \big[|f(n)| < c \cdot g(n)\big]$$

„f wächst echt langsamer als g“

- $f(n) \in \Omega(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0)\ \left[|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0\right]$$

„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht langsamer als g“

- $f(n) \in \omega(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\ c > 0$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0)\ \left[|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\right]$$

„f wächst echt schneller als g“

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \text{ und } f(n) \in \Omega(g(n))$$

„f wächst (bis auf konstante Faktoren) genauso schnell wie g“

- $f(n) \in \Omega_\infty(g(n))$ genau dann, wenn $\exists\ c > 0$, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0\,.$$

- $f(n) \in \omega_\infty(g(n))$ genau dann, wenn $\forall\ c > 0\ \exists$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\,.$$

Bemerkungen:

1. Man schreibt oft, aber logisch unsauber $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$.
2. Oft werden nur Funktionen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ betrachtet (oder $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$); dann sind die Absolutbeträge überflüssig.
3. Manchmal werden auch Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder das Verhalten für $x \to a$ betrachtet.
4. Achtung: Die Notation für Ω und Ω_∞ ist in der Literatur nicht eindeutig; im Zweifelsfall muss auf die jeweilige Definition geachtet werden!

Beispiel 36

Behauptung: $n! \in O(n^n)$

Beweis:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left[n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \leq 1 \cdot n^n\ \right]$$

$\square$

Beispiel 37

Behauptung: $\log n! \in O(n \log n)$

Beweis:

$(\forall n \in \mathbb{N})\left[\log n! = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 1 < 1 \cdot n \cdot \log n\right]$ $\square$