Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2005
Übungsblatt 12
26. Januar 2006

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 1. Februar 2006 vor der **Zentralübung**

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Satzes von Kuratowski die folgenden Aussagen.

1. Es ist möglich, drei Häuser mit Strom, Gas und Wasser zu versorgen, wenn die Leitungen alle ebenerdig verlaufen müssen und sich nicht schneiden dürfen.
2. Wenn man zu einem beliebigen Baum $G = (V, E)$ einen neuen Knoten v hinzufügt und v mit allen Knoten in V verbindet, so ist der entstehende Graph planar.
3. Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Aufgabe 2

1. Gegeben seien die Bäume
   $B_1 = ([9], \{\{1,9\}, \{2,7\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{8,3\}, \{6,7\}, \{7,9\}, \{3,9\}\})$,
   $B_2 = ([9], \{\{2,1\}, \{1,7\}, \{5,7\}, \{4,1\}, \{7,3\}, \{9,3\}, \{6,4\}, \{8,4\}\})$.
   Bestimmen Sie zu B_1 und B_2 jeweils den Prüfer-Code.
2. Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.
   i) 77777777, ii) 1212121, iii) 9876543, iv) 82267222.
3. Man zeige: Wenn man den vollständigen Graphen K_n mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ ausgehend von einem beliebigen Knoten mit Tiefensuche (Algorithmus DFS) durchsucht, dann ist der resultierende Spannbaum immer ein einfacher Pfad.

Aufgabe 3

Man zeige:

1. Jeder Graph mit Gradfolge 5,4,4,4,3,2,2 ist zusammenhängend.
2. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt.
3. Jeder Baum ist bipartit.
4. $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ ist die größte Anzahl von Kanten, die ein bipartiter Graph mit n Knoten besitzen kann.
5. Jeder k-reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis.

Aufgabe 4

Gegeben sei der Digraph
$G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{(a, b), (a, d), (a, e), (b, d), (c, h), (d, e), (d, f), (g, h)\})$.

1. Zeichnen Sie eine graphische Darstellung von G.
2. Stellen Sie für G die Inzidenzmatrix und die Adjazenzmatrix auf. Berechnen Sie die Laplacesche Matrix von G.
3. Welche Zusammenhangskomponenten hat G? Welche starken Zusammenhangskomponenten hat G?
4. Fasst man G als Relation auf, dann ist die transitive Hülle von G definiert. Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix der transitiven Hülle von G.
5. Zeigen Sie, dass G ein dag ist.

   Geben Sie eine topologische Nummerierung der Knoten von G an.