Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2005
Übungsblatt 9
23. Dezember 2005

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 13. Januar 2006 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1

1. Benutzen Sie die Stirlingsche Ungleichung zur möglichst präzisen Abschätzung des Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ in O-Notation.

2. Der Binomische Satz gilt auch, wenn man statt Potenzen Fallende oder Steigende Fakultäten verwendet, d. h.

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}\,,$$

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}\,.$$

   Beweisen Sie die beiden Gleichungen durch Induktion.

Aufgabe 2

Tante Erna macht Tee und es kommen n Gäste. Es bilden sich wie immer Gruppen und Grüppchen, in denen die Gäste im Kreis stehen. Jede Gruppe besteht aus mindestens einem Gast und es bilden sich k Gruppen.
Wenn in einer Gruppe mehr als zwei Gäste stehen, dann hat jeder Gast einen linken und einen rechten Gesprächspartner. Zwei Gruppenverteilungen werden als gleich angesehen, wenn jeder Gast die gleichen Nachbarn hat, wobei es aber ein Unterschied sein soll, ob eine bestimmte Person ein linker oder rechter Nachbar einer anderen Person ist.

1. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es, wenn Tante Erna zunächst nicht dabei ist?

2. Tante Erna schliesst sich nun einer der k Gruppen an. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es jetzt?

3. Wir nehmen nun an, dass ein Pärchen unter den Gästen ist, das auf jeden Fall nebeneinander sitzen will. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es jetzt bei k Gruppen (Erna sei nicht dabei) ?

Aufgabe 3

Berechnen Sie einen geschlossenen Ausdruck für die folgende Summe mit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} (n+2) \frac{k!}{(-n)^{\overline{k}}} \,.$$

Verwenden Sie Maple zur Lösung dieser Aufgabe. Machen Sie sich mit den Kommandos `sum` und `simplify` zum Berechnen von geschlossenen Ausdrücken für Summen vertraut (Online-Hilfe von Maple). Es lohnt sich auch beim Verwenden von Maple, die Terme ein wenig umzuformen.

Aufgabe 4

Das Problem der lexikografischen Auflistung aller Teilmengen von $\{0\} \cup [n-1]$ für $n \in \mathbb{N}$ kann eingebettet werden in das Problem der lexikografischen Auflistung aller Mengen $T \cup P$ mit $T \subseteq \{0\} \cup [m]$, wobei für alle T das gleiche, feste P und das gleiche, feste m angenommen wird mit $P \subseteq \{m+1, \ldots, n-1\}$ und $m \in \mathbb{N}_0, m \leq n-1$.

1. Begründen Sie, warum der folgende Algorithmus `appendlexlist(P,m)` mit dem Aufruf `appendlexlist(∅,n-1)` eine lexikografische Auflistung aller Teilmengen von $\{0\} \cup [n-1]$ liefert.

```
appendlexlist(set P, nat m)
  for k=0,1 do
    if k=1 then P:=P ∪ {n}  fi
    if m=0 then print(P)
    else
      appendlexlist(P,m-1)
    fi
  od
end
```

2. Implementieren Sie die Prozedur `appendlexlist(P,m)` in Maple.

3. Erzeugen Sie mit Ihrer Implementierung eine Auflistung aller Teilmengen von $\{0\} \cup [3]$.