

Beispiel 57

Wir wollen wissen, wie oft eine bestimmte Gegend im Durchschnitt von einer Naturkatastrophe (z.B. Vulkanausbruch) getroffen wird.

Aus Statistiken entnehmen wir, dass so ein Ereignis im Mittel 10^{-4} -mal pro Jahr auftritt. Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit, dass die Region in einem Jahr mehr als einmal von einem solchen Unglück heimgesucht wird.

Die Voraussetzungen scheinen erfüllt zu sein, die Anzahl X der Katastrophen durch eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 10^{-4}$ zu modellieren.

Damit gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq 2] &= 1 - \Pr[X = 0] - \Pr[X = 1] = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \\ &\approx 1 - 0,999900005 - 0,000099990 = 5 \cdot 10^{-9}.\end{aligned}$$

Summe von Poisson-verteiltern Zufallsvariablen

Satz 58

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Po}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Po}(\mu)$, dann gilt

$$Z := X + Y \sim \text{Po}(\lambda + \mu).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) = \sum_{x=0}^z \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^{z-x}}{(z-x)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!} \cdot \sum_{x=0}^z \frac{z!}{x!(z-x)!} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda+\mu)^z \frac{1}{z!} \cdot \sum_{x=0}^z \binom{z}{x} p^x (1-p)^{z-x}, \end{aligned}$$

wobei $p := \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Da die Summe gleich 1 ist, folgt

$$f_Z(z) = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda+\mu)^z \frac{1}{z!}.$$

□

6. Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

6.1 Die Ungleichungen von Markov und Chebyshev

Satz 59 (Markov-Ungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Äquivalent dazu:

$$\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq 1/t.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} t \cdot \Pr[X \geq t] &= t \cdot \sum_{x \in W_X, x \geq t} \Pr[X = x] \\ &\leq \sum_{x \in W_X, x \geq t} x \cdot \Pr[X = x] \\ &\leq \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \\ &= \mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

□

Alternativer Beweis:

Es gilt

$$E[X] = E[X|X < t]Pr[X < t] + E[X|X \geq t]Pr[X \geq t].$$

Wegen $E[X|X < t]Pr[X < t] \geq 0$ und $E[X|X \geq t] \geq t$ folgt sofort

$$E[X] \geq t * Pr[X \geq t].$$

Die Markov-Ungleichung ist nach **Andrey Andreyevich Markov** (1856–1922) benannt, der an der Universität von St. Petersburg bei **Chebyshev** studierte und später dort arbeitete. Neben seiner mathematischen Tätigkeit fiel Markov durch heftige Proteste gegen das Zaren-Regime auf, und nur sein Status als vermeintlich harmloser Akademiker schützte ihn vor Repressalien durch die Behörden. Im Jahr 1913 organisierte er parallel zum dreihundertjährigen Geburtstag der Zarenfamilie Romanov eine Feier zum zweihundertjährigen Geburtstag des **Gesetzes der großen Zahlen** (s.u.).

Die folgende Abschätzung ist nach **Pavnuty Lvovich Chebyshev** (1821–1894) benannt, der ebenfalls an der Staatl. Universität in St. Petersburg wirkte.

Satz 60 (Chebyshev-Ungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable, und sei $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}.$$

Äquivalent dazu:

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\text{Var}[X]}] \leq 1/t^2.$$

Beweis:

Wir stellen fest, dass

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] = \Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2].$$

Setze

$$Y := (X - \mathbb{E}[X])^2.$$

Dann gilt $\mathbb{E}[Y] = \text{Var}[X]$, und damit mit der Markov-Ungleichung:

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] = \Pr[Y \geq t^2] \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{t^2} = \frac{\text{Var}[X]}{t^2}.$$



Beispiel 61

Wir werfen 1000-mal eine ideale Münze und ermitteln die Anzahl X der Würfe, in denen „Kopf“ fällt.

X ist binomialverteilt mit $X \sim \text{Bin}(1000, p = \frac{1}{2})$, also gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}n = 500 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{4}n = 250.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 550-mal „Kopf“ fällt?

Beispiel 61

Chebyshev-Ungleichung:

$$\Pr[X \geq 550] \leq \Pr[|X - 500| \geq 50] \leq \frac{250}{50^2} = 0,1.$$

Setze nun $n = 10000$ und betrachte wieder eine maximal 10%-ige Abweichung vom Erwartungswert:

$\mathbb{E}[X] = 5000$ und $\text{Var}[X] = 2500$, und damit

$$\Pr[X \geq 5500] \leq \Pr[|X - 5000| \geq 500] \leq \frac{2500}{500^2} = 0,01.$$

6.2 Gesetz der großen Zahlen

Wir haben diskutiert, wie Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte von relativen Häufigkeiten aufgefasst werden können.

Satz 62 (Gesetz der großen Zahlen)

Gegeben sei eine Zufallsvariable X . Ferner seien $\varepsilon, \delta > 0$ beliebig aber fest. Dann gilt für alle $n \geq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon\delta^2}$:

Sind X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie X und setzt man

$$Z := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

so gilt

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \varepsilon.$$

Beweis:

Für Z gilt

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{n} \cdot (\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X],$$

sowie

$$\text{Var}[Z] = \frac{1}{n^2} \cdot (\text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n]) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \text{Var}[X] = \frac{\text{Var}[X]}{n}.$$

Mit der Chebyshev-Ungleichung erhalten wir

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] = \Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq \delta] \leq \frac{\text{Var}[Z]}{\delta^2} = \frac{\text{Var}[X]}{n\delta^2} \leq \varepsilon,$$

nach Wahl von n . □