

Lemma 136

Für die erwarteten Übergangs-/Rückkehrzeiten gilt

$$h_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj} \text{ für alle } i, j \in S, i \neq j,$$

$$h_j = 1 + \sum_{k \neq j} p_{jk} h_{kj} ,$$

sofern die Erwartungswerte h_{ij} und h_{kj} existieren.

Für die Ankunfts-/Rückkehrwahrscheinlichkeiten gilt analog

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj} \text{ für alle } i, j \in S, i \neq j;$$

$$f_j = p_{jj} + \sum_{k \neq j} p_{jk} f_{kj} .$$

Beweis:

Sei $i \neq j$. Wir bedingen auf das Ergebnis des ersten Schritts der Markov-Kette und erhalten aufgrund der Gedächtnislosigkeit

$\Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = k] = \Pr[T_{kj} < \infty]$ für $k \neq j$ sowie

$\Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = j] = 1$.

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \Pr[T_{ij} < \infty] = \sum_{k \in S} \Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = k] \cdot p_{ik} \\ &= p_{ij} + \sum_{k \neq j} \Pr[T_{kj} < \infty] \cdot p_{ik} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj} . \end{aligned}$$

Die Ableitung für f_j (also $i = j$) ist analog.

Beweis:

Sei wiederum $i \neq j$. Wegen der Gedächtnislosigkeit folgt

$\mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = k] = 1 + \mathbb{E}[T_{kj}]$ für $k \neq j$. Ferner gilt

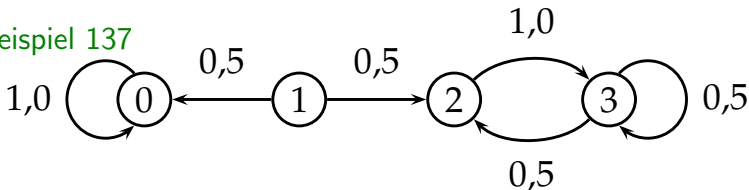
$\mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = j] = 1$.

Bedingen wir wieder auf das Ergebnis des ersten Schritts, so folgt (siehe Satz 35):

$$\begin{aligned} h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}] &= \sum_{k \in S} \mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = k] \cdot p_{ik} \\ &= p_{ij} + \sum_{k \neq j} (1 + \mathbb{E}[T_{kj}]) \cdot p_{ik} = 1 + \sum_{k \neq j} h_{kj} \cdot p_{ik}. \end{aligned}$$

Wiederum ist die Herleitung für h_j analog. □

Beispiel 137



Für die Berechnung der Übergangszeiten für die Zustände 2 und 3 erhalten wir die Gleichungen

$$h_2 = 1 + h_{32}, \quad h_3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{23}$$

und

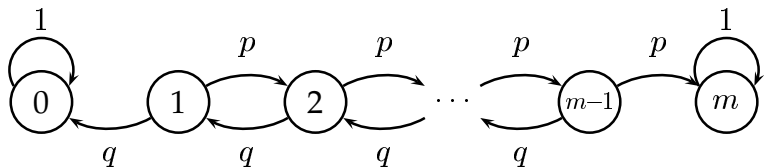
$$h_{23} = 1, \quad h_{32} = 1 + \frac{1}{2} h_{32} = 2.$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhalten wir die Werte $h_2 = 3$, $h_3 = 1,5$, $h_{23} = 1$ und $h_{32} = 2$, die man leicht verifiziert. Die Ankunftswahrscheinlichkeiten lassen sich analog herleiten. Man erhält $f_2 = f_3 = f_{23} = f_{32} = 1$.

2.4 Das Gamblers Ruin Problem

Anna und Bodo spielen Poker, bis einer von ihnen bankrott ist. A verfügt über Kapital a , und B setzt eine Geldmenge in Höhe von $m - a$ aufs Spiel. Insgesamt sind also m Geldeinheiten am Spiel beteiligt. In jeder Pokerrunde setzen A und B jeweils eine Geldeinheit. A gewinnt jedes Spiel mit Wahrscheinlichkeit p . B trägt folglich mit Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ den Sieg davon. Wir nehmen an, dass diese Wahrscheinlichkeiten vom bisherigen Spielverlauf und insbesondere vom Kapitalstand der Spieler unabhängig sind.

Wir modellieren das Spiel durch die Markov-Kette



A interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit, mit der sie B in den Ruin treibt, also für die Wahrscheinlichkeit $f_{a,m}$ (wir schreiben hier der Deutlichkeit halber $f_{i,j}$ statt f_{ij}).

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f_{i,m} &= p \cdot f_{i+1,m} + q \cdot f_{i-1,m} \text{ für } 1 \leq i < m - 1, & (10) \\ f_{m-1,m} &= p + q \cdot f_{m-2,m}, \\ f_{0,m} &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen nun $f_{i,m}$ allgemein als Funktion von m berechnen. Dazu beobachten wir zunächst, dass wir (10) wegen $f_{m,m} = 1$ umschreiben können zu

$$f_{i+1,m} = (1/p) \cdot f_{i,m} - (q/p) \cdot f_{i-1,m} \text{ für } 1 \leq i < m. \quad (11)$$

Wir ergänzen (11) um die Anfangswerte

$$f_{0,m} = 0 \text{ und } f_{1,m} = \xi.$$

(Für den Moment fassen wir ξ als Variable auf. Nach Lösung der Rekursion werden wir ξ so wählen, dass die Bedingung $f_{m,m} = 1$ erfüllt ist.)

Als Lösung dieser linearen homogenen Rekursionsgleichung 2. Ordnung (11) ergibt sich für $p \neq 1/2$:

$$f_{i,m} = \frac{p \cdot \xi}{2p - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^i \right).$$

Setzen wir nun $i = m$, so folgt aus $f_{m,m} = 1$, dass

$$\xi = \frac{2p - 1}{p \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^m \right)}$$

gelten muss.

Insgesamt erhalten wir somit das Ergebnis:

$$f_{j,m} = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^j}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}.$$

Für $p = 1/2$ verläuft die Rechnung ähnlich.

Beispiel 138

Wir wollen berechnen, wie lange A und B im Mittel spielen können, bis einer von ihnen bankrott geht.

$h_{a,m}$ eignet sich dazu i.a. nicht (warum?).

Wir betrachten stattdessen:

T'_i := „Anzahl der Schritte von Zustand i nach
Zustand 0 oder m “

und setzen

$$d_i := \mathbb{E}[T'_i].$$

Offensichtlich gilt $d_0 = d_m = 0$ und für $1 \leq i < m$

$$d_i = qd_{i-1} + pd_{i+1} + 1.$$

Beispiel (Forts.)

Wir betrachten nun nur den Fall $p = q = 1/2$ und erhalten

$$d_i = i \cdot (m - i) \text{ für alle } i = 0, \dots, m.$$

Wegen $d_i \leq mi \leq m^2$ folgt also, dass das Spiel unabhängig vom Startzustand im Mittel nach höchstens m^2 Schritten beendet ist.