

---

## Diskrete Strukturen II

---

Abgabetermin: 9. Juni 2006 vor der Zentralübung

### Aufgabe 1

Sei  $F(z)$  bzw.  $G(z)$  die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für eine Zufallsvariable  $X_F$  bzw.  $X_G$ . Sei  $H(z) = F(G(z))$ .

1. Berechnen Sie  $H(1)$ ,  $H'(1)$  und  $H''(1)$  in Abhängigkeit ggf. von  $\mathbb{E}[X_F]$ ,  $\text{Var}[X_F]$ ,  $\mathbb{E}[X_G]$  und  $\text{Var}[X_G]$ !
2. Definieren Sie (nicht notwendigerweise mit Hilfe von  $X_G$  und  $X_F$ ) eine Zufallsvariable  $X_H$ , für die  $H$  die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion darstellt, und berechnen Sie  $\Pr[X_H = 1]$ !

### Aufgabe 2

Es sei  $M_1$  eine Maschine, die bei Aufruf zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der Zahlen 1, 2 oder 3 ausgibt. Wir bezeichnen die entsprechende Zufallsvariable mit  $N$ . Eine Maschine  $M_2$  werfe bei Aufruf eine faire Münze, die entweder "Kopf" oder "Wappen" zeigt.

Wir betrachten einen Algorithmus  $A$ , dessen Ausführung in 2 Schritten ein Ergebnis erzeugt. Im ersten Schritt wird  $M_1$  veranlasst, eine Zahl  $k$  auszugeben. Im zweiten Schritt wird  $M_2$   $k$  mal aufgerufen. Das Ergebnis einer Ausführung von  $A$  definieren wir als diejenige Zahl, die angibt, wie oft im zweiten Schritt "Kopf" geworfen wurde.

Es sei  $Y$  die Zufallsvariable, die die Ergebnisse des Algorithmus  $A$  beschreibt.

1. Geben Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion  $G_N(z)$  für  $N$  an.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert  $\mathbb{E}[Y]$ .
3. Berechnen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion  $G_Y(z)$  für  $Y$ .

### Aufgabe 3

1. Sei  $(H_n)_{n \geq 1}$  eine rekurrente Ereignisfolge. Die Zufallsvariable  $Z$  mit  $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  messe für  $k \in \mathbb{N}$  die Wartezeit  $Z = k$  bis zum Eintreten des ersten Ereignisses  $H_k$  der Ereignisfolge.

Zeigen Sie die Ungleichung

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \Pr[Z = k] \leq 1.$$

2. Sei  $(X_n)_{n \geq 1}$  eine Folge unabhängiger Indikatorvariablen mit gleicher Bernoulli-Verteilung. Zeigen Sie, dass die Folge  $(H_n)_{n \geq 1}$  der Ereignisse  $H_n = „X_n = 1“$  rekurrent ist.

## Aufgabe 4

Peter und Paul spielen ein Spiel, bei dem jeder von ihnen mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  gewinnt. In jeder Runde setzt jeder von ihnen € 10 ein (der Gewinner erhält dann € 20).

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter € 100 Gewinn gemacht hat, bevor er € 50 Verlust macht?
2. Wenn Peter erst mal seinen Gewinn hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er insgesamt auf € 50 Verlust kommt?