Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Christian Scheideler
Stefan Eckhardt

Sommersemester 2006
Übungsblatt 10
13. Juli 2006

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Abgabetermin: 19. Juli 2006 **vor** *der Zentralübung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Durch G gibt es immer einen Schnitt der Größe mindestens $\frac{1}{2}|E|$.

(a) Beweisen Sie diesen Satz durch Anwendung der probabilistischen Methode.

(b) Derandomisieren Sie den Algorithmus aus Teilaufgabe (a) mit Hilfe der Methode der bedingten Erwartungswerte.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Max-Cut Problem mit Hilfe der semidefiniten Programmierung approximiert werden kann. Finden Sie nun eine Arithmetisierung des Max-Cut Problems, bei der das Problem durch ein ganzzahliges lineares Programm beschrieben wird.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Beim Randomizied Rounding wurde die Funktion $\pi(x) = x$ in der Vorlesung verwendet, aber auch darauf hingewiesen, dass es andere Möglichkeiten gibt. Man sagt, *die Funktion π erfüllt die 3/4-Eigenschaft*, falls für alle $k \in \mathbb{N}$, alle $l \in \{0, \dots, k\}$ und alle $(x_1, \dots, x_k) \in [0,1]^k$ gilt:

$$1 - \left[\prod_{i=1}^{l}(1-\pi(x_i))\right] \cdot \left[\prod_{i=l+1}^{k}\pi(x_i)\right] \geq \frac{3}{4} \cdot \min\left\{1, \left[\sum_{i=1}^{l}\pi(x_i)\right] + \left[\sum_{i=l+1}^{k}(1-\pi(x_i))\right]\right\}$$

Zeigen Sie:

(a) Wird im Algorithmus Randomized Rounding eine Funktion π verwendet, welche die 3/4-Eigenschaft erfüllt, dann ist die erwartete Güte des Algorithmus 4/3.

(b) Die Funktionen $\gamma_\alpha(x) = (1-2\alpha)x + \alpha$ mit $\alpha \in [1 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{4}]$ erfüllen die 3/4-Eigenschaft.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Das Max2Sat Problem ist das MaxSat Problem unter der Einschränkung, dass jede Klausel der Eingabeformel Φ aus maximal 2 Literalen besteht. Max2Sat ist ein NP-hartes Optimierungsproblem. Betrachten Sie die folgende Arithmetisierung des Max2Sat Problems. Für jede Boolsche Variable x_i haben wir eine Variable y_i, die den Wert -1 oder $+1$ annehmen kann. Zusätzlich gibt es eine Variable y_0, die ebenfalls nur Werte aus $\{-1, +1\}$ annehmen kann und die x_i auf $True$ setzt, wenn y_i und y_0 das gleiche Vorzeichen haben. Den Beitrag einer Klausel der Länge 1 zu $wahr(b, \Phi)$ können wir mit der folgenden Funktion beschreiben:

$$\begin{aligned} v(x_i) &= \frac{1 + y_i \cdot y_0}{2} \\ v(\bar{x}_i) &= \frac{1 - y_i \cdot y_0}{2} \end{aligned}$$

Für Klauseln der Länge 2 können wir ähnliche Formeln angeben.

(a) Geben Sie alle 4 Möglichkeiten für Klauseln der Länge 2 einer Formel $v(.)$ an.

(b) Formulieren Sie mittels der Funktion v ein quadratisches Programm für Max2Sat

(c) Formulieren Sie ein semidefinites Programm als Relaxierung des quadratischen Programms aus Teilaufgabe (c).

(d) Geben Sie einen Approximationsalgorithmus für das Max2Sat Problem an und zeigen sie, dass die erwartete relative Güte 1.139 ist.