

## 7. Rekursionsgleichungen

### Beispiel 4 (Mergesort)

$$\begin{aligned}T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn \\&= cn + 2T\left(\frac{n}{2}\right) \\&= cn + 2\left(c\frac{n}{2} + 2T\left(\frac{n}{4}\right)\right) \\&= cn + cn + 4T\left(\frac{n}{4}\right) \\&\approx cn \log_2 n \text{ (nur genau für Zweierpotenzen)}\end{aligned}$$

## Methoden zur Lösung von Rekursionsgleichungen

- 1 Multiplikatorenmethode
- 2 Lineare homogene Rekursionsgleichungen können mit Hilfe des **charakteristischen Polynoms** gelöst werden
- 3 Umwandlung inhomogener Rekursionsgleichungen in homogene
- 4 Erzeugendenfunktionen
- 5 Transformation des Definitions- bzw. Wertebereichs
- 6 ...

Es gibt **keinen** vollständigen Satz von Methoden.

## 7.1 Multiplikatoren

Sei  $f_1 = 1$ ,  $f_n = 2f_{n-1} + n$  für  $n \geq 2$ .

$$\left. \begin{array}{l} f_n = 2f_{n-1} + n \quad | \cdot 1 \\ f_{n-1} = 2f_{n-2} + n - 1 \quad | \cdot 2 \\ \vdots \\ f_2 = 2f_1 + 2 \quad | \cdot 2^{n-2} \\ f_1 = 1 \quad | \cdot 2^{n-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} f_n = 2^{n-1}f_1 + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i(n-i) \\ = 2^{n+1} - n - 2 \end{array}$$

Durch Addieren aller Gleichungen erhalten wir:

$$f_n = 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i(n-i) = \underbrace{2^{n-1}}_{(1)} + n \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} 2^i}_{(2)} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} i \cdot 2^i}_{(3)}$$

Term (2) (geometrische Reihe):

$$n \sum_{i=0}^{n-2} 2^i = n(2^{n-1} - 1)$$

Term (3) (mit der Substitution:  $n - 2 = k$ ):

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^k ix^i &= \sum_{i=1}^k ix^i = x \sum_{i=1}^k ix^{i-1} \\ &= x \sum_{i=1}^k \frac{dx^i}{dx} = x \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^k x^i \\ &= x \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} \right) \\ &= \frac{kx^{k+2} - x^{k+1}(k+1) + x}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Einsetzen von  $k = n - 2$  und  $x = 2$  ergibt:

$$\sum_{i=0}^{n-2} i2^i = 2^n(n-2) - 2^{n-1}(n-1) + 2 = 2^n n - 2^{n+1} - 2^{n-1}n + 2^{n-1} + 2$$

(2) - (3):

$$\begin{aligned}n \sum_{i=0}^{n-2} 2^i - \sum_{i=0}^{n-2} i2^i &= n \cdot (2^{n-1} - 1) - 2^n n + 2^{n+1} + 2^{n-1} n - 2^{n-1} - 2 \\ &= 2^{n-1}(2n - 1) - 2^n(n - 2) - n - 2\end{aligned}$$

und schließlich (1) + (2) - (3):

$$\begin{aligned}2^{n-1} + n \sum_{i=0}^{n-2} 2^i + \sum_{i=0}^{n-2} i2^i &= 2^{n-1} + 2^{n-1}(2n - 1) - 2^n(n - 2) - n - 2 \\ &= 2^{n+1} - n - 2\end{aligned}$$

## 7.2 Charakteristisches Polynom

Sei

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 2 .$$

Es handelt sich hier um eine **lineare homogene Rekursionsgleichung zweiter Ordnung**.

Ansatz:  $f_n := a^n$  für ein unbekanntes  $a$ .

Dann muss gelten:  $a^n - a^{n-1} - a^{n-2} = 0$ . Da hier  $a \neq 0$ :

$$a^2 - a - 1 = 0; \text{ also } a_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Falls  $a_1$  und  $a_2$  Lösungen der Rekursionsgleichung sind, dann auch  $f_n = c_1 a_1^n + c_2 a_2^n$ , für beliebige Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ .

$f_1 = 1$  und  $f_0 = 0$  liefern zwei Gleichungen für  $c_1$  und  $c_2$ , mit der Lösung:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$



## Satz 5

Sei  $p(x)$  das charakteristische Polynom zur (linearen homogenen) Rekursionsgleichung

$$p_0 f_n + p_1 f_{n-1} + \cdots + p_k f_{n-k} = 0 \quad (1)$$

mit den konstanten Koeffizienten  $p_i$ . Seien  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  die (i.a. komplexen) Wurzeln von  $p(x)$ , jeweils mit Vielfachheit  $m_i$ . Dann ist die allgemeine Lösung der Rekursionsgleichung (1) gegeben durch

$$f_n = \sum_{i=1}^m \left( r_i^n \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j \right),$$

mit Konstanten  $c_{ij}$ .