Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2007/08

Übersicht

1. Zusammenhang
   - Schnitte minimaler Kantenkapazität
   - Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

Minimum Cuts

Notation:

- $\bar{X} = V \setminus X$
- Im Folgenden werden wir einen Schnitt $(X, \bar{X})$ oft einfach nur mit X bezeichnen.

Lemma

Seien $(A, \bar{A})$ und $(B, \bar{B})$ mit $A \neq B$ zwei Minimum Cuts in $G = (V, E)$, so dass $T = A \cup B$ auch ein Minimum Cut in G ist. Dann gilt:

$$w(A, \bar{T}) = w(B, \bar{T}) = w(A \setminus B, B) = w(A, B \setminus A) = \frac{\lambda}{2}$$

Minimum Cuts

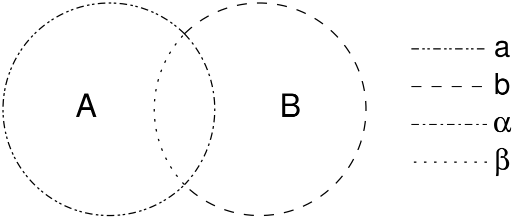


Abbildung: Schnitt zweier Minimum Cuts A und B

Minimum Cuts

Beweis.

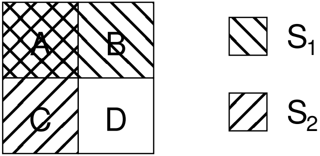
- Sei $a = w\left(A, \bar{T}\right)$,
  $b = w\left(B, \bar{T}\right)$,
  $\alpha = w(A, B \setminus A)$ und
  $\beta = w(B, A \setminus B)$.

$\Rightarrow$ $w\left(A, \bar{A}\right) = a + \alpha = \lambda$,
$w\left(B, \bar{B}\right) = b + \beta = \lambda$
$w\left(T, \bar{T}\right) = a + b = \lambda$

- Es gilt auch:
  $w\left(A \setminus B, B \cup \bar{T}\right) = a + \beta \geq \lambda$ und
  $w\left(B \setminus A, A \cup \bar{T}\right) = b + \alpha \geq \lambda$.
- Dieses (Un-)Gleichungssystem hat nur eine Lösung:
  $a = \alpha = b = \beta = \frac{\lambda}{2}$.

□

Minimum Cuts

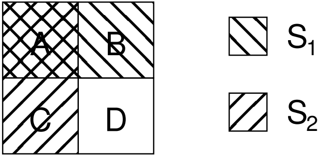


Definition

Ein Paar $\langle S_1, S_2 \rangle$ heißt Crossing Cut, falls S_1, S_2 Minimum Cuts sind und keine der folgenden Mengen leer ist:

- $A = S_1 \cap S_2$,
- $B = S_1 \setminus S_2$,
- $C = S_2 \setminus S_1$
- $D = \bar{S_1} \cap \bar{S_2}$

Crossing Cuts



Lemma

Seien $\langle S_1, S_2 \rangle$ Crossing Cuts und seien Mengen wie folgt definiert: $A = S_1 \cap S_2$, $B = S_1 \setminus S_2$, $C = S_2 \setminus S_1$ *and* $D = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$. *Dann gilt:*

1. *A, B, C und D sind Minimum Cuts.*
2. $w(A, D) = w(B, C) = 0$
3. $w(A, B) = w(B, D) = w(D, C) = w(C, A) = \frac{\lambda}{2}$

Crossing Cuts

Beweis.

- Da S_1 und S_2 Minimum Cuts sind, gilt:
  - $w\left(S_1, \bar{S}_1\right) = w(A,C) + w(A,D) + w(B,C) + w(B,D) = \lambda$
  - $w\left(S_2, \bar{S}_2\right) = w(A,B) + w(A,D) + w(B,C) + w(C,D) = \lambda$

$\Rightarrow$ $w(A,B)+w(A,C)+2w(A,D)+2w(B,C)+w(B,D)+w(C,D) = 2\lambda$

- Da es keinen Schnitt mit Kapazität $< \lambda$ gibt, gilt:

$$\begin{array}{rcll} w\left(A,\bar{A}\right) & = & w(A,B) + w(A,C) + w(A,D) & \geq & \lambda \\ w\left(B,\bar{B}\right) & = & w(A,B) + w(B,C) + w(B,D) & \geq & \lambda \\ w\left(C,\bar{C}\right) & = & w(A,C) + w(B,C) + w(C,D) & \geq & \lambda \\ w\left(D,\bar{D}\right) & = & w(A,D) + w(B,D) + w(C,D) & \geq & \lambda \end{array}$$

$\Rightarrow$ $2[w(A,B)+w(A,C)+w(A,D)+w(B,C)+w(B,D)+w(C,D)] \geq 4\lambda$

$\Rightarrow$ $w(A,D) = w(B,C) = 0$ (keine Diagonalkanten)

Crossing Cuts

Beweis.

- Die waagerechte Linie in der Abbildung entspricht dem Minimum Cut $(S_1, \bar{S_1}) = (A \cup B, C \cup D) = \lambda$, die senkrechte entspricht $(S_2, \bar{S_2}) = (A \cup C, B \cup D) = \lambda$.
- Analogie: Länge der Kanten entspricht Kapazität der geschnittenen Kanten
- Annahme: die waagerechte und senkrechte Linie schneiden sich nicht genau in der Mitte

$\Rightarrow$ Dann definiert eine der Teilmengen $X = A$, B, C oder D einen Schnitt $w(X, \bar{X}) < \lambda$ (Widerspruch)

$\Rightarrow$ $w(A, B) = w(B, D) = w(D, C) = w(C, A) = \frac{\lambda}{2}$ und $w(A, \bar{A}) = w(B, \bar{B}) = w(C, \bar{C}) = w(D, \bar{D}) = \lambda$

□

Zirkuläre Partitionen

Crossing Cuts in $G = (V, E)$ partitionieren V in vier Teile
Allgemeiner:

Definition

Eine zirkuläre Partition ist eine Partition von V in $k \geq 3$ disjunkte Mengen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, so dass

- $w(V_i, V_j) = \begin{cases} \lambda/2 & \text{falls } |i-j| = 1 \mod k \\ 0 & sonst \end{cases}$
- Falls S ein Minimum Cut ist, dann ist
  - S oder $\bar{S}$ eine echte Teilmenge einer Menge V_i oder
  - die zirkuläre Partition ist eine Verfeinerung der Partition, die durch den Minimum Cut S definiert wird.
    (S ist die Vereinigung einiger Mengen der zirkulären Partition.)

Zirkuläre Partitionen

- Seien $V_1, V_2, \ldots, V_k$ die disjunkten Mengen einer zirkulären Partitionierung.
- Dann ist für alle a, b mit $1 \leq a \leq b < k$ die Menge $S = \bigcup_{i=a}^{b} V_i$ (zusammen mit $\bar{S}$) ein Minimum Cut.
- Diese Minimum Cuts bezeichnen wir als Circular Partition Cuts.
- Insbesondere ist jedes V_i $(1 \leq i \leq k)$ ein Minimum Cut (erster Punkt der vorstehenden Definition).
- Betrachte einen Minimum Cut S, so dass weder S noch $\bar{S}$ in einer Menge der zirkulären Partition enthalten ist. Da S zusammenhängend ist, ist S oder $\bar{S}$ gleich $\bigcup_{i=a}^{b} V_i$ für ein Paar a, b mit $1 \leq a < b < k$
- Für alle V_i einer zirkulären Partitionierung existiert kein Minimum Cut S, so dass $\langle V_i, S \rangle$ ein Crossing Cut ist (zweiter Punkt der vorstehenden Definition).

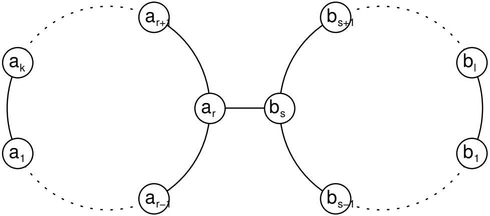
Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Definition

Zwei verschiedene zirkuläre Partitionen $P = \{U_1, \ldots, U_k\}$ und $Q = \{V_1, \ldots, V_l\}$ sind kompatibel, wenn es eindeutige Zahlen r und s $(1 \leq r, s \leq k)$ gibt, so dass $\forall i \neq r : U_i \subseteq V_s$ und $\forall j \neq s : V_j \subseteq U_r$.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beispiel:



$$P = \{\{a_1\},\ldots,\{a_{r-1}\},\{a_r,b_1,\ldots b_l\},\{a_{r+1}\},\ldots\{a_k\}\}$$

$$Q = \{\{b_1\},\ldots,\{b_{s-1}\},\{b_s,a_1,\ldots a_k\},\{b_{s+1}\},\ldots\{b_l\}\}$$

Lemma

Alle verschiedenen zirkulären Partitionen sind paarweise kompatibel.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Betrachte zwei zirkuläre Partitionen P und Q in $G = (V, E)$.
- Alle Mengen der Partitionen sind Minimum Cuts.
- Annahme: eine Menge $S \in P$ ist die Vereinigung von mindestens zwei, aber nicht von allen Mengen von Q.
- Genau zwei Mengen $A, B \in Q$, die in S enthalten sind, sind durch mindestens eine Kante zu den Knoten in $V \setminus S$ verbunden.
- Sei T die Menge, die man durch Ersetzen von $A \subset S$ durch ein Element von Q erhält, das zu B verbunden, aber nicht in S enthalten ist.

$\Rightarrow$ Dann ist $\langle S, T \rangle$ ein Crossing Cut (Widerspruch)

$\Rightarrow$ Jede Menge von P oder ihr Komplement ist in einer Menge von Q enthalten.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Annahme: zwei Mengen von P sind in zwei verschiedenen Mengen von Q enthalten.
- Da jedes Komplement der verbleibenden Mengen von P nicht in *einer* Menge von Q enthalten sein kann, muss jede übrige Menge von P in einer Teilmenge von Q enthalten sein.

$\Rightarrow$ $P = Q$ (Widerspruch)

- Annahme: alle Mengen von P sind in einer Menge Y von Q

$\Rightarrow$ $Y = V$ (Widerspruch)

- Da die Vereinigung von zwei Komplementen von Mengen aus P gleich V ist und Q mindestens drei Mengen enthält, kann nur ein Komplement in einer Menge von Q enthalten sein.

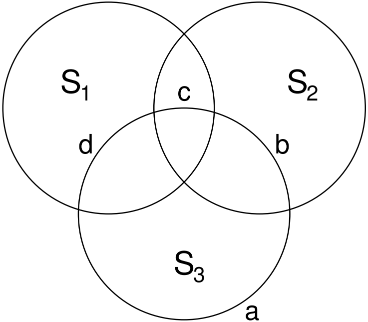
$\Rightarrow$ Es gibt genau eine Menge X in P, die nicht in Y von Q enthalten ist, aber $\bar{X} \subset Y$.

Paarweise Disjunktheit von Crossing Cuts

Lemma

Wenn S_1, S_2 und S_3 paarweise Crossing Cuts sind, dann gilt:

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$$



Paarweise Disjunktheit von Crossing Cuts

Beweis.

- Annahme: das Lemma ist falsch, also die Schnittmenge ist nicht leer
- Definiere
  - $a = w\left(S_3 \setminus (S_1 \cup S_2), \overline{S_1 \cap S_2 \cap S_3}\right)$
  - $b = w\left((S_2 \cap S_3) \setminus S_1, S_2 \setminus (S_1 \cup S_3)\right)$
  - $c = w\left(S_1 \cap S_2 \cap S_3, (S_1 \cap S_2) \setminus S_3\right)$
  - $d = w\left((S_1 \cap S_3) \setminus S_2, S_1 \setminus (S_2 \cup S_3)\right)$
- Einerseits ist $S_1 \cap S_2$ ein Minimum Cut. $\Rightarrow \quad c \geq \frac{\lambda}{2}$
- Andererseits ist $c + b = c + d = \frac{\lambda}{2}$.

$\Rightarrow$ $b = d = 0$ und $(S_1 \cap S_3) \setminus S_2 = (S_2 \cap S_3) \setminus S_1 = \emptyset$

- Da es keine diagonalen Kanten in Crossing Cuts gibt (siehe früheres Lemma), sind $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ und $S_3 \setminus (S_1 \cup S_2)$ nicht verbunden. (Widerspruch)

$\square$

Weitere Sätze

Satz

In einem Graphen $G = (V, E)$ gibt es für jede einem Crossing Cut entsprechende Partition P von V in 4 disjunkte Mengen eine zirkuläre Partition in G, die eine Verfeinerung von P ist.

Satz

Ein Graph $G = (V, E)$ hat $\mathcal{O}\left(\binom{|V|}{2}\right)$ viele Minimum Cuts (und diese Schranke ist scharf).

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

Definition

Eine Menge $\mathcal{S}$ von Mengen heißt laminar, wenn für jedes Paar von Mengen $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ gilt, dass entweder S_1 und S_2 disjunkt sind, oder eine der beiden Menge die andere enthält.

- Jede laminare Menge $\mathcal{S}$ kann als Baum repräsentiert werden.
- Jeder Knoten repräsentiert eine Menge in $\mathcal{S}$.
- Die Blätter des Baums repräsentieren die Mengen von $\mathcal{S}$, die keine anderen Mengen enthalten.
- Der Vater eines zur Menge T gehörigen Knotens repräsentiert die (eindeutige) kleinste Übermenge von T.
- Die Konstruktion liefert eine Menge von Bäumen, deren Wurzelknoten Mengen repräsentieren, die in keiner anderen Menge von $\mathcal{S}$ enthalten sind.

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

- Hinzufügen eines künstlichen Wurzelknotens, der mit allen eigentlichen Wurzeln verbunden ist, liefert einen Baum.

$\Rightarrow$ Die Knoten eines Baums repräsentieren alle Mengen von $\mathcal{S}$, wobei die Wurzel die zugrundeliegende Gesamtmenge (Vereinigung aller Mengen) repräsentiert.

- Wenn diese Vereinigung n Elemente enthält, kann der Baum höchstens n Blätter bzw. $2n - 1$ Knoten haben.