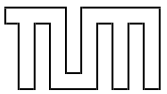
# Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2007/08



# Übersicht

# Berechnung eines globalen MinCuts

- 1994 Algorithmus publiziert von M. Stoer und F. Wagner
- benutzt keine MaxFlow-Technik
- sehr einfach
- arbeitet in $n-1$ Phasen
- Phase hat starke Ähnlichkeit zu den Algorithmen von Prim (minimale Spannbäume) bzw. Dijkstra (kürzeste Wege)
- Pro Phase Komplexität $\mathcal{O}(m + n \log n)$
- Gesamtkomplexität $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$

# Der Stoer/Wagner-Algorithmus

**Algorithmus 9** : MinCut Berechnung nach Stoer & Wagner

**Input** : Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
**Output** : Ein MinCut $C_{\min}$ entsprechend $\lambda(G)$

Wähle einen beliebigen Startknoten $a$;
$C_{\min} \leftarrow$ undefiniert;
$V' \leftarrow V$;
**while** $|V'| > 1$ **do**
    $A \leftarrow \{a\}$;
    **while** $A \neq V'$ **do**
        Füge zu $A$ den am meisten angebundenen Knoten hinzu;
        Aktualisiere die Kapazitäten zwischen $A$ und den Knoten in $V' \setminus A$;
    $C :=$ Schnitt von $V'$, der den zuletzt zu $A$ hinzugefügten Knoten vom Rest des Graphen trennt;
    **if** $C_{\min} = \text{undefiniert}$ *or* $w(C) < w(C_{\min})$ **then**
        $C_{\min} \leftarrow C$;
    Verschmelze die zwei Knoten, die zuletzt zu $A$ hinzugefügt wurden;
**return** $C_{\min}$;

# Beschreibung des Stoer/Wagner-Algorithmus

- Wahl eines beliebigen Startknotens $a$
- Algorithmus verwaltet eine Knotenteilmenge $A$ (initialisiert mit $a$), die immer wieder um einen Knoten erweitert wird, der gerade maximale Anbindung (also Summe der Kantenkapazitäten) an die aktuellen Knoten in $A$ hat.
- Nachdem alle Knoten in $A$ eingefügt wurden, nennt man den Cut, der nur den zuletzt hinzugefügten Knoten $t$ vom Rest abtrennt 'Cut der Phase'.
- Verschmelzung der beiden zuletzt behandelten Knoten $s$ und $t$:
  - Wenn zwischen $s$ und $t$ eine Kante existiert, wird sie einfach gelöscht.
  - Alte Kanten von einem anderen Knoten $\{x, s\}$ und $\{x, t\}$ werden durch eine neue Kante mit der Summe der alten Gewichte $w(s, x) + w(t, x)$ ersetzt.

# Korrektheit des Stoer/Wagner-Algorithmus

## Lemma

*Der 'Cut der Phase' ist ein Minimum $(s,t)$-Cut für die beiden zuletzt in $A$ eingefügten Knoten $s$ und $t$.*

## Beweis.

- Betrachte beliebigen $s$-$t$-Cut $C$ für die letzten zwei Knoten.
- Ein Knoten $v \neq a$ heißt aktiv, falls sich $v$ und sein unmittelbarer Vorgänger bezüglich der Addition zu $A$ in unterschiedlichen Teilen von $C$ befinden.
- Sei $A_v$ die Menge von Knoten, die in $A$ sind bevor $v$ hinzugefügt wird.
- Sei $w(S,v)$ für eine Knoten(teil)menge $S$ die Kapazitätssumme aller Kanten zwischen $v$ und den Knoten in $S$.

# Korrektheit des Stoer/Wagner-Algorithmus

## Beweis.

- Beweisidee: (Induktion über die aktiven Knoten)

  Für jeden aktiven Knoten $v$ gilt, dass die Anbindung (Adjazenz) zu den Knoten, die zuvor eingefügt wurden (also $A_v$), nicht das Gewicht des durch $C$ in $A_v \cup \{v\}$ induzierten Cuts (bezeichnet mit $C_v$) überschreitet.
- Es gilt also zu zeigen, dass gilt:

$$w(A_v, v) \leq w(C_v)$$

- Induktionsanfang: (1. aktiver Knoten)
  Im Basisfall ist die Ungleichung erfüllt, weil beide Werte für den ersten aktiven Knoten gleich sind.

# Korrektheit des Stoer/Wagner-Algorithmus

## Beweis.

- Induktionsvoraussetzung:
  Das Lemma stimmt für alle aktiven Knoten bis zum aktiven Knoten $v$.

$\Rightarrow$ Der Wert für den nächsten aktiven Knoten $u$ ist

$$\begin{aligned} w(A_u, u) &= w(A_v, u) + w(A_u \setminus A_v, u) \\ &\leq w(A_v, v) + w(A_u \setminus A_v, u) \\ &\leq w(C_v) + w(A_u \setminus A_v, u) \quad \text{(Ind.voraussetzung)} \\ &\leq w(C_u) \end{aligned}$$

- Die letzte Zeile folgt, weil alle Kanten zwischen $A_u \setminus A_v$ und $u$ ihr Gewicht zu $w(C_u)$ beitragen, aber nicht zu $w(C_v)$.
- Da $t$ durch den Cut $C$ von seinem unmittelbaren Vorgänger $s$ getrennt wird, ist es immer ein aktiver Knoten.
- Die Schlussfolgerung $w(A_t, t) \leq w(C_t)$ beschließt den Beweis.

□

# Korrektheit des Stoer/Wagner-Algorithmus

## Satz

*Ein 'Cut der Phase' mit minimaler Kantenkapazität ist ein MinCut des gegebenen Graphen*

## Beweis.

- Für $|V| = 2$ trivial (bei zwei Knoten existiert nur *ein* Cut).
- Annahme: $|V| > 2$, 2 Fälle:
  1. Entweder der Graph hat einen MinCut, der gleichzeitig ein (lokaler) Minimum $s$-$t$-Cut ist.
     Dann ist der entsprechende Cut nach Lemma ein globaler MinCut des Graphen.
  2. Andernfalls hat der Graph einen globalen MinCut, bei dem $s$ und $t$ nicht separiert werden (sich also auf der gleichen Seite befinden).
     Dann wird der globale MinCut durch das Verschmelzen von $s$ und $t$ nicht verändert.

$\Rightarrow$ (Induktion über die Anzahl der Knoten)
Der 'Cut der Phase' mit minimaler Gewichtssumme ist ein globaler MinCut.

□

# Beispiel für den Stoer/Wagner-Algorithmus

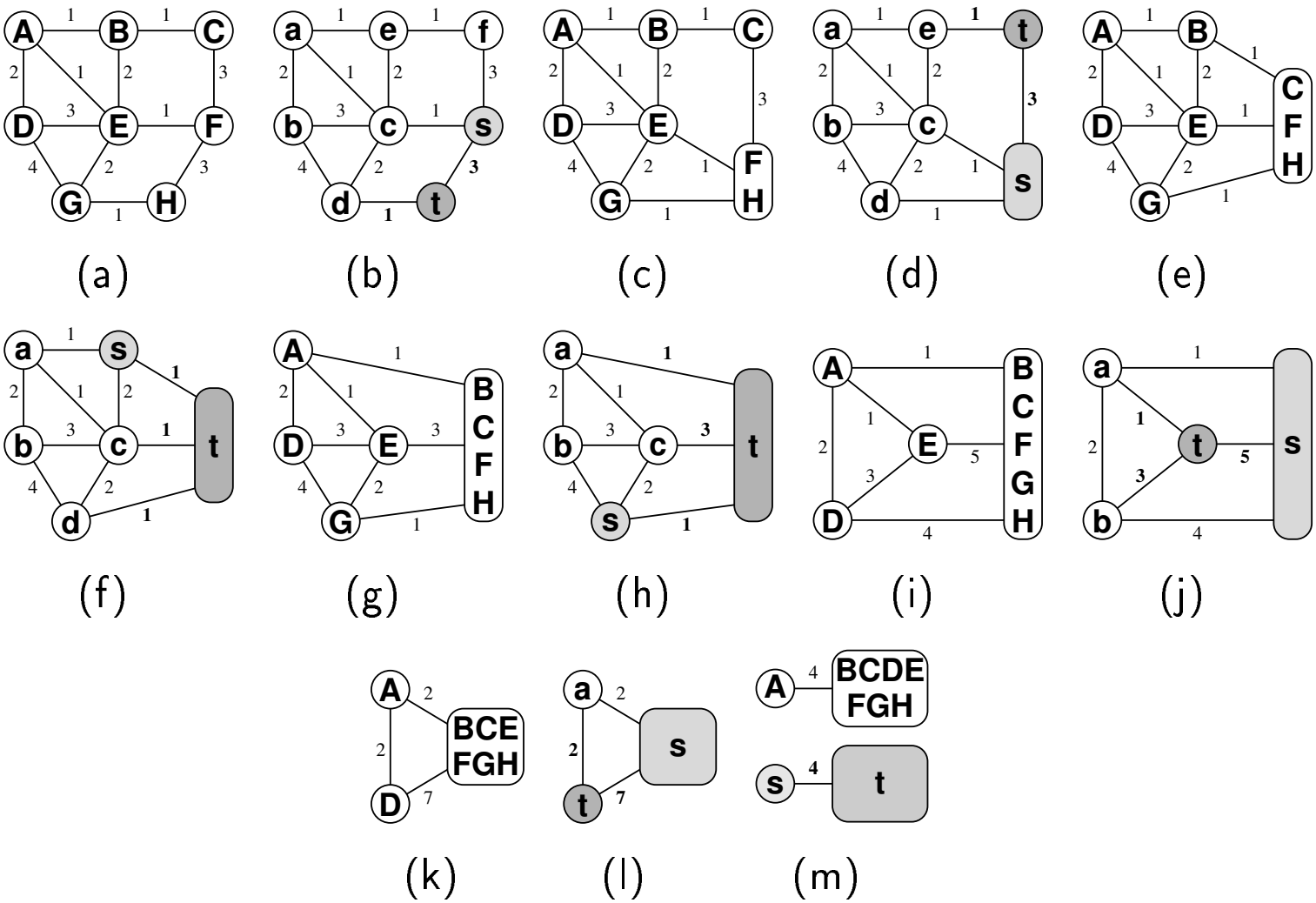



Abbildung: Der MinCut $\{ABDEG\} \mid \{CFH\}$ wird gefunden in Phase 3 (f)

# Der randomisierte MinCut-Algorithmus von Karger

- Gesucht: globaler Minimum Cut in einem Multi-Graphen
- D. Karger (1992): Vorschlag eines sehr einfachen Algorithmus ohne augmentierende Pfade und Flussberechnungen
- Ansatz: randomisierte Suche (Monte-Carlo-Algorithmus), die mit gewisser (Erfolgs-)Wahrscheinlichkeit den Minimum Cut liefert (und mit gewisser (Fehler-)Wahrscheinlichkeit einen beliebigen anderen Cut)

# Der randomisierte MinCut-Algorithmus von Karger

- Der Algorithmus wählt eine beliebige Kante $e = \{u, v\}$ von $G$, und zwar uniform identisch verteilt (d.h. jede Kante wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen).
- Die gewählte Kante wird kontrahiert, d.h. es wird ein Multi-Graph $G'$ erzeugt, bei dem die Knoten $u$ und $v$ zu einem neuen Knoten $w$ verschmolzen sind.
- Kanten zwischen $u$ und $v$ verschwinden.
- Andere Kanten bleiben erhalten. Wenn genau ein Endknoten entweder $u$ oder $v$ ist, dann endet dafür eine neue Kante am (Super-)Knoten $w$.
- Hinweis: auch wenn $G$ keine Multikanten enthält, kann $G'$ welche enthalten.
- Das Verfahren wird rekursiv auf $G'$ angewendet.

# Der randomisierte MinCut-Algorithmus von Karger

- Der Algorithmus endet, wenn nur noch zwei (Super-)Knoten vorhanden sind.
- Jeder der beiden Knoten enthält eine gewisse Menge der Knoten des ursprünglichen Graphen.
- Diese Partition definiert einen Cut, der vom Algorithmus ausgegeben wird.

**Satz**

*Der Monte-Carlo-Algorithmus von Karger gibt mit Wahrscheinlichkeit* $\geq 1/\binom{n}{2}$ *den globalen Minimum Cut des Multigraphen zurück.*

- Nachdem es exponentiell viele Cuts in $G$ gibt, würde man vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit, den globalen MinCut zu finden, exponentiell klein ist.
- Was favorisiert die kleinen Cuts?

# Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

## Beweis.

- Betrachte globalen MinCut $(A, B)$ in $G$.
- Sei die Schnitt-Kardinalität $k$, d.h. es gibt genau $k$ Kanten ($F$), die einen Endpunkt in $A$ und einen in $B$ haben.
- gesucht: untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus $(A, B)$ zurück gibt.
- Was kann dabei schiefgehen?
- Eine Kante aus $F$ könnte kontrahiert werden.
- Dann würden zwei Knoten kontrahiert, die auf unterschiedlichen Seiten des Cuts $(A, B)$ liegen.
- Der Algorithmus könnte nicht mehr $(A, B)$ ausgeben.
- Wenn eine beliebige Kante aus $E \setminus F$ kontrahiert wird, besteht noch die Chance auf die Ausgabe $(A, B)$.

# Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

**Beweis.**

- also gesucht: obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante aus $F$ kontrahiert wird.
- Wir brauchen eine untere Schranke für die Kardinalität von $E$.
- Wenn der globale MinCut den Wert $\lambda(G) = k$ hat, gilt für den Minimalgrad des Graphen $\delta(G) \geq \lambda(G) = k$.
- Es gilt also $|E| \geq kn/2$.

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante aus $F$ kontrahiert wird, ist

$$\frac{k}{kn/2} = \frac{2}{n}$$

- Betrachte jetzt die Situation nach $j$ Iterationen.
- Es gibt $n - j$ Superknoten im aktuellen $G'$.

# Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

**Beweis.**

- Annahme: es wurde noch keine Kante aus $F$ kontrahiert.
- Da jeder Cut in $G'$ auch ein Cut in $G$ ist, sind zu jedem Superknoten in $G'$ mindestens $k$ Kanten inzident.
- D.h. $G'$ hat mindestens $k(n-j)/2$ Kanten.

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante aus $F$ in der nächsten Iteration $j+1$ kontrahiert wird, ist

$$\frac{k}{k(n-j)/2} = \frac{2}{n-j}$$

- Cut $(A, B)$ wird ausgegeben, wenn in Iteration $1, \ldots, n-2$ keine Kante aus $F$ kontrahiert wird.

# Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

## Beweis.

- Sei $\mathcal{E}_j$ das Ereignis, dass in Iteration $j$ keine Kante aus $F$ kontrahiert wird. Dann gilt also: $\Pr[\mathcal{E}_1] \geq 1 - 2/n$ und

$$\Pr[\mathcal{E}_{j+1} | \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_j] \geq 1 - 2/(n-j)$$

- gesucht: unter Schranke für $\Pr[\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_{n-2}]$ bzw. $\Pr[\mathcal{E}_1] \cdot \Pr[\mathcal{E}_2|\mathcal{E}_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[\mathcal{E}_{n-2}|\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_{n-3}]$

$$\begin{aligned} &\geq \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n-1}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{n-j}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)} = \binom{n}{2}^{-1} \end{aligned}$$

# Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

- Wahrscheinlichkeit, dass der randomisierte MinCut-Algorithmus nicht den Cut $(A, B)$ ausgibt, ist höchstens $1 - 1/\binom{n}{2}$
- Nach $\binom{n}{2}$ Läufen mit unabhängigen Zufallsentscheidungen ist die Wahrscheinlichkeit, dass nie der MinCut gefunden wurde, höchstens

$$\left(1 - 1/\binom{n}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \leq \frac{1}{e}$$

- Wenn $c\binom{n}{2} \log n$ Läufe gestartet werden, sinkt die Fehlerwahrscheinlichkeit auf $\leq e^{-c \log n} = 1/n^c$.
- Laufzeit ist in dieser einfachen Form noch relativ hoch, verglichen mit dem besten deterministischen Algorithmus

# Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

- Ansatz ist unbalanciert: Fehlerwahrscheinlichkeit erhöht sich zum Ende eines Laufs
- Wenn man den Algorithmus nur $t$ Schritte laufen lässt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Kante aus $F$ kontrahiert wird $\Pr[\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_t]$ bzw. $\Pr[\mathcal{E}_1] \cdot \Pr[\mathcal{E}_2|\mathcal{E}_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[\mathcal{E}_t|\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_{t-1}]$

$$
\begin{aligned}
&\geq \left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{n-(t-1)}\right)\\
&= \frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-t}{n-t+2}\cdot\frac{n-t-1}{n-t+1}\\
&= \frac{(n-t)\cdot(n-t-1)}{n(n-1)} \in \Omega\left(\frac{(n-t)^2}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

# Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

Verbesserte Variante:

- Lasse die einfache Variante mehrmals laufen
  (z.B. 2-mal bis $\lceil n/\sqrt{2}+1 \rceil$ Knoten
  oder 4-mal bis $n/2$ Knoten)
- Setze jeden der Läufe rekursiv mit der modifizierten Variante fort.
- Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\Omega(1/\log n)$
- $\mathcal{O}(\log n)$-malige Wiederholung des modifizierten Algorithmus sorgt für konstante Erfolgswahrscheinlichkeit.
- Um eine kleine Fehlerwahrscheinlichkeit $\epsilon$ zu erreichen, kann man $\mathcal{O}(\log n \log \epsilon^{-1})$ Wiederholungen durchführen, was zu einer Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(n^2 \log^2 n \log \epsilon^{-1})$ führt.