7.5 Greibach-Normalform

Definition 108

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. G ist in Greibach-Normalform (benannt nach Sheila Greibach (UCLA)), falls jede Produktion $\neq S \to \epsilon$ von der Form

$$A \to a\alpha \text{ mit } a \in \Sigma,\ \alpha \in V^*$$

ist.

Lemma 109

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontextfrei, $(A \to \alpha_1 B \alpha_2) \in P$, und sei $B \to \beta_1|\beta_2|\ldots|\beta_r$ die Menge der B-Produktionen (also die Menge der Produktionen mit B auf der linken Seite). Ersetzt man $A \to \alpha_1 B \alpha_2$ durch $A \to \alpha_1\beta_1\alpha_2|\alpha_1\beta_2\alpha_2|\ldots|\alpha_1\beta_r\alpha_2$, so ändert sich die von der Grammatik erzeugte Sprache nicht.

Lemma 110

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontextfrei, sei $A \to A\alpha_1|A\alpha_2|\ldots|A\alpha_r$ die Menge der linksrekursiven A-Produktionen (alle $\alpha_i \neq \epsilon$, die Produktion $A \to A$ kommt o.B.d.A. nicht vor), und seien $A \to \beta_1|\beta_2|\ldots|\beta_s$ die restlichen A-Produktionen (ebenfalls alle $\beta_i \neq \epsilon$).

Ersetzen wir alle A-Produktionen durch

$$\begin{aligned} A &\to \beta_1|\ldots|\beta_s|\beta_1A'|\ldots|\beta_sA' \\ A' &\to \alpha_1|\ldots|\alpha_r|\alpha_1A'|\ldots|\alpha_rA', \end{aligned}$$

wobei A' ein neues Nichtterminal ist, so ändert sich die Sprache nicht, und die neue Grammatik enthält keine linksrekursive A-Produktion mehr.

Beweis:

Von A lassen sich vor der Transformation alle Zeichenreihen der Form

$$(\beta_1|\beta_2|\ldots|\beta_s)(\alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_r)^*$$

ableiten.

Dies ist auch nach der Transformation der Fall. Während vor der Transformation alle Zeichenreihen der obigen Form von rechts her aufgebaut werden, werden sie danach von links nach rechts erzeugt.

Die Umkehrung gilt ebenso. □

Satz 111

Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es eine äquivalente Grammatik in Greibach-Normalform.

Beweis:

Sei o.B.d.A. $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{A_1, \ldots, A_m\}$ in Chomsky-Normalform und enthalte keine nutzlosen Variablen.

Bemerkung: Im folgenden Algorithmus werden ggf neue Variablen hinzugefügt, die Programmvariable m ändert sich dadurch entsprechend!

Beweis:

for $k = 1, \ldots, m$ **do**
  for $j = 1, \ldots, k-1$ **do**
    for all $(A_k \to A_j\alpha) \in P$ **do**
      ersetze die Produktion gemäß der Konstruktion
      in Lemma 109
    od
  od
  co die rechte Seite keiner A_k-Produktion beginnt nun
    noch mit einer Variablen A_j, $j < k$ **oc**

  ersetze alle linksrekursiven A_k-Produktionen gemäß der
  Konstruktion in Lemma 110
  co die rechte Seite keiner A_k-Produktion beginnt nun
    noch mit einer Variablen A_j, $j \leq k$ **oc**
od

Beweis (Forts.):

Da nun für jede Produktion der Form

$$A_k \to A_j\alpha$$

gilt:

$$j > k$$

(dies impliziert insbesondere, dass die rechte Seite jeder A_m-Produktion mit einem Terminalzeichen beginnt), können wir durch genügend oftmalige Anwendung der Konstruktion in Lemma 109 erreichen, dass jede rechte Seite mit einem Terminalzeichen beginnt. $\square$

Korollar 112

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Es gibt einen Algorithmus, der eine zu G äquivalente Grammatik in Greibach-Normalform konstruiert, deren rechte Seiten jeweils höchstens zwei Variablen enthalten.

Beweis:

Klar! $\square$

7.6 Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen

Satz 113

Sei G eine CFG in Greibach-Normalform. Dann kann in linearer Zeit ein NPDA A konstruiert werden (welcher mit leerem Stack akzeptiert), so dass

$$L(A) = L(G) .$$

Beweis:

Sei o.B.d.A. $\epsilon \notin L(G)$.

Der Automat startet mit S auf dem Stack. Er sieht sich in jedem Schritt das oberste Stacksymbol A an und überprüft, ob es in G eine Produktion gibt, deren linke Seite A ist und deren rechte Seite mit dem Terminal beginnt, welches unter dem Lesekopf steht.

Sei also $G = (V, T, P, S)$.

Konstruiere NPDA $A = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta)$ mit

$$\begin{array}{lcl} Q & := & \{q_0\} \\ \Delta & := & V \\ \Sigma & := & T \\ Z_0 & := & S \end{array}$$

$$\delta(q_0, a, A) \ni (q_0, \alpha) \quad \text{für } (A \to a\alpha) \in P\ .$$

Beweis (Forts.):

Zu zeigen ist nun: $L(A) = L(G)$.

Hilfsbehauptung:

$$S \rightarrow_G^* w_1 \ldots w_i A_1 \ldots A_m \text{ mit } w_j \in T, A_j \in V \text{ per Linksableitung}$$

$$\Leftrightarrow (q_0, w_1 \ldots w_i, Z_0) \rightarrow_A^* (q_0, \epsilon, A_1 \ldots A_m)$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Anzahl der Schritte in der Linksableitung.

Beweis (Forts.):

Induktionsanfang ($i = 0$):

$$S \rightarrow_G^* S \qquad \Leftrightarrow \qquad (q_0, \epsilon, Z_0) \rightarrow_A^* (q_0, \epsilon, Z_0)$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschritt $((i-1) \mapsto i)$:

$$\begin{array}{cll} & S & \rightarrow_G^* w_1 \dots w_i A_1 \dots A_m \\ \Leftrightarrow & S & \rightarrow_G^* w_1 \dots w_{i-1} A' A_v \dots A_m \quad v \in \{1, \dots, m+1\} \\ & & \rightarrow_G w_1 \dots w_i A_1 \dots A_m \\ & & \text{(also } (A' \rightarrow w_i\, A_1 \dots A_{v-1}) \in P\text{)} \end{array}$$

gemäß Induktionsvoraussetzung

$$\begin{array}{cll} \Leftrightarrow & (q_0, w_1 \dots w_{i-1}, Z_0) & \rightarrow_A^* (q_0, \epsilon, A' A_v \dots A_m) \\ \Leftrightarrow & (q_0, w_1 \dots w_{i-1} w_i, Z_0) & \rightarrow_A^* (q_0, w_i, A' A_v \dots A_m) \\ & & \rightarrow_A (q_0, \epsilon, A_1 \dots A_m) \\ & & \text{da } (A' \rightarrow w_i\, A_1 \dots A_{v-1}) \in P\text{)} \\ & & \\ \Leftrightarrow & (q_0, w_1 \dots w_i, Z_0) & \rightarrow_A^* (q_0, \epsilon, A_1 \dots A_m) \end{array}$$

Beweis (Forts.):

Aus der Hilfsbehauptung folgt

$$L(A) = L(G)\ .$$

$\square$

Satz 114

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta)$ *ein NPDA, der mit leerem Keller akzeptiert. Dann ist* $L(A)$ *kontextfrei.*

Beweis:

Wir definieren:

$$G = (V, T, P, S)$$
$$T := \Sigma$$
$$V := Q \times \Delta \times Q \cup \{S\} \qquad \text{wobei wir die Tupel mit } [,,] \text{ notieren}$$
$$P \ni S \to [q_0, Z_0, q] \text{ für } q \in Q$$
$$P \ni [q, Z, q_m] \to a[p, Z_1, q_1][q_1, Z_2, q_2] \cdots [q_{m-1}, Z_m, q_m]$$
$$\text{für } \delta(q, a, Z) \ni (p, Z_1 \cdots Z_m), \forall q_1, \ldots, q_m \in Q,$$
$$\text{mit } a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}\,.$$

Idee: Aus $[p, X, q]$ sollen sich alle die Wörter ableiten lassen, die der NPDA A lesen kann, wenn er im Zustand p mit (lediglich) X auf dem Stack startet und im Zustand q mit leerem Stack endet.

Beweis (Forts.):

Hilfsbehauptung:

$$[p, X, q] \rightarrow_G^* w \Leftrightarrow (p, w, X) \rightarrow_A^* (q, \epsilon, \epsilon)\,.$$

„$\Rightarrow$“: Induktion über die Länge l der Ableitung.

Induktionsanfang ($l = 1$):

$$\begin{array}{rl} & [p, X, q] \rightarrow_G w \\ \Rightarrow & \delta(p, w, X) \ni (q, \epsilon) \\ \Rightarrow & (p, w, X) \rightarrow_A (q, \epsilon, \epsilon) \end{array}$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschritt $((l-1) \mapsto l)$:
Gelte

$$\begin{aligned}[p, X, q_{m+1}] &\rightarrow_G a[q_1, X_1, q_2][q_2, X_2, q_3] \cdots [q_m, X_m, q_{m+1}] \\ &\rightarrow_G^* a w^{(1)} \cdots w^{(m)} = w\end{aligned}$$

mit $(q_1, X_1 \cdots X_m) \in \delta(p, a, X)$, $[q_i, X_i, q_{i+1}] \rightarrow_G^{l_i} w^{(i)}$ und $\sum l_i < l$.

Dann gilt gemäß Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad (q_i, w^{(i)}, X_i) &\rightarrow_A^{l_i} (q_{i+1}, \epsilon, \epsilon) \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ \Rightarrow \quad (q, \underbrace{a w^{(1)} \cdots w^{(m)}}_{=w}, X) &\rightarrow_A (q_1, w^{(1)} \cdots w^{(m)}, X_1 \cdots X_m) \\ &\rightarrow_A^{<l} (q_{m+1}, \epsilon, \epsilon)\ .\end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

„$\Leftarrow$“: Induktion über die Länge l einer Rechnung des NPDAs A

Induktionsanfang ($l = 1$):

$$
\begin{array}{ll}
 & (p, w, X) \rightarrow_A (q, \epsilon, \epsilon) \\
\Rightarrow & (q, \epsilon) \in \delta(p, w, X) \qquad \text{(also } |w| \leq 1) \\
\Rightarrow & ([p, X, q] \rightarrow w) \in P\,.
\end{array}
$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschritt ($(l-1) \mapsto l$):
Sei

$$\begin{aligned}(p, w, X) &\rightarrow_A (q_1, w', X_1 \cdots X_m)\\ &\rightarrow_A^* (q, \epsilon, \epsilon)\end{aligned}$$

eine Rechnung von A der Länge l, mit $w = ew'$ und $e \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

Nach Definition gibt es

$$([p, X, q] \rightarrow e[q_1 X_1 q_2] \cdots [q_m X_m q_{m+1}]) \in P \quad \text{mit } q_{m+1} = q$$

und eine Zerlegung $w' = w^{(1)} \cdots w^{(m)}$, so dass $w^{(1)} \cdots w^{(i)}$ der von A zu dem Zeitpunkt verarbeitete Teilstring von w' ist, wenn X_{i+1} zum ersten Mal oberstes Stacksymbol (bzw., für $i = m$, der Stack leer) wird.

Beweis (Forts.):

Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt also

$$(q_i, w^{(i)}, X_i) \to_A^{l_i} (q_{i+1}, \epsilon, \epsilon) \qquad \text{mit } \sum l_i < l \text{ und}$$
$$[q_i, X_i, q_{i+1}] \to_G^* w^{(i)}\ .$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}[p, X, q] &\to_G e[q_1, X_1, q_2] \cdots [q_m, X_m, q_{m+1}] \quad \text{mit } q_{m+1} = q \\ &\to_G^{<l} e w^{(1)} \cdots w^{(m)} = w\end{aligned}$$

Aus der Hilfsbehauptung folgt der Satz. □

Satz 115

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- L *wird von einer kontextfreien Grammatik erzeugt.*
- L *wird von einem NPDA akzeptiert.*

Beweis:

Folgt aus den vorhergehenden Sätzen. □