Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2010/11

Cluster

- Zusammenhangsfunktion jedes Graphen hat ein Plateau über jeder $\sigma(G)$-Komponente und evt. auch noch an anderen Stellen.
- Plateaus sind Gebiete von (lokal) optimalem Zusammenhang, d.h., k-Komponenten, die völlig disjunkt zu $(k+1)$-Komponenten sind.

Definition

Jeder isolierte Knoten und für $k \geq 1$ jede k-Komponente von G, die keine $(k+1)$-Komponente enthält, ist ein Cluster von G.

- Graph G ist ein Cluster, falls $\sigma(G) = \lambda(G)$.
- Verschiedene Cluster können keine gemeinsamen Knoten enthalten (folgt aus Disjunktheit von k-Komponenten).
- Manche Knoten sind in keinem Cluster.
- Cluster lassen sich aus der Zusammenhangsfunktion bestimmen

Subcluster

Definition

Ein induzierter Teilgraph $K[A]$ eines Clusters K des Graphen G mit $\lambda(K[A]) = \lambda(K)$ heißt Subcluster von G.

- Subcluster repräsentieren also induzierte Teilgraphen von lokal maximalem Kantenzusammenhang, die nicht unbedingt inklusions-maximal sind.
- Wenn $G[A]$ und $G[B]$ Subcluster von G sind, für die gilt $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $A \cup B$ ein Subcluster von G.

Cluster und Subcluster

- Die Subcluster eines Graphen bilden unter der Relation "ist echter Teilgraph von" eine partielle Ordnung mit Clustern als maximalen Elementen.
- Die partielle Ordnung der Subcluster in einem bestimmten Cluster ist ein beschränkter Verband.
- Da alle Cluster eines Graphen disjunkt sind, ist die vollständige partielle Ordnung eine Vereinigung von disjunkten beschränkten Verbänden.

Schnitt von Subclustern

Satz

Seien $G[A]$ und $G[B]$ Subcluster eines Clusters K in G, so dass $A \cap B \neq \emptyset$.

Wenn es einen MinCut von $G[A] \cup G[B]$ gibt, der

- *die Knoten in $A \setminus B$ von den Knoten in $B \setminus A$ separiert und*
- *der mindestens eine Kante aus $G[A \cap B]$ enthält,*

dann ist $G[A \cap B]$ ein Subcluster von K in G.

Schnitt von Subclustern

Beweis.

- Annahme: $C = (W, \bar{W})$ ist MinCut von $G[A] \cup G[B]$ mit $A \setminus B \subset W$ und $B \setminus A \subset \bar{W}$ und mindestens eine Kante von C ist in $G[A \cap B]$

$\Rightarrow$ C ist auch ein Cut für $G[A]$ und für $G[B]$

- $\lambda(G[A] \cup G[B]) \geq \min\{\lambda(G[A]), \lambda(G[B])\}$ (siehe Lemma über zusammenhängende Vereinigung von Teilgraphen)

$\Rightarrow$ $\lambda(G[A] \cup G[B]) = \lambda(G[A]) = \lambda(G[B]) = \sigma(K)$ (da $G[A]$ und $G[B]$ Subcluster sind)

$\Rightarrow$ $|C| = \sigma(K)$ und $C \subset E(G[A \cap B])$ (da jeder Cut von $G[A]$ und $G[B]$ mindestens $\sigma(K)$ Kanten enthält)

Schnitt von Subclustern

Beweis.

- Sei $D = A \cap B$, $X = W \cap D$, $\bar{X} = \overline{W} \cap D$.
- $C = (W, \overline{W})$ ist auch Cut von $G[D]$
- Beweisidee: zeigen, dass jeder Cut von $G[D]$ mindesten $\sigma(K)$ Kanten enthält
- Sei $C_y = (Y, \bar{Y})$ ein Cut von $G[D]$
- Falls $Y \subset X$, dann $C_y = (Y, \bar{Y}) = (Y, \bar{Y} \cup \overline{W})$ ist auch Cut von $G[B]$, also $|C_y| \geq \sigma(K)$
- Ebenso, wenn $Y \subset \bar{X}$, $\bar{Y} \subset X$ oder $\bar{Y} \subset \bar{X}$, dann ist C_y Cut von $G[A]$ oder $G[B]$ und damit $|C_y| \geq \sigma(K)$
- Ansonsten sind die folgenden vier Knotenmengen nicht leer: $D_1 = X \cap Y$, $D_2 = X \cap \bar{Y}$, $D_3 = \bar{X} \cap Y$, $D_4 = \bar{X} \cap \bar{Y}$
- $\bigcup_{i=1}^{4} D_i = D = A \cap B$

Schnitt von Subclustern

Beweis.

- Da $G[B]$ Subcluster von K ist, enthält der Cut zwischen D_1 und $B \setminus D_1$ in $G[B]$ mindestens $\sigma(K)$ Kanten die alle zwischen D_1 einerseits und D_2, D_3 und D_4 andererseits verlaufen:

$$|(D_1, B \setminus D_1)| = |(D_1, D_2)| + |(D_1, D_3)| + |(D_1, D_4)| \geq \sigma(K)$$

Ebenso für D_2 und $B \setminus D_2$ in $G[B]$:

$$|(D_2, B \setminus D_2)| = |(D_1, D_2)| + |(D_2, D_3)| + |(D_2, D_4)| \geq \sigma(K)$$

- Addition ergibt:

$$2|(D_1, D_2)| + |(D_1, D_3)| + |(D_1, D_4)| + |(D_2, D_3)| + |(D_2, D_4)| \geq 2\sigma(K)$$

$$\Rightarrow 2|(D_1, D_2)| + |(D_1 \cup D_2, D_3 \cup D_4)| \geq 2\sigma(K)$$

Schnitt von Subclustern

Beweis.

- $(D_1 \cup D_2, D_3 \cup D_4) = (X, \bar{X}) = C$
- also $|(D_1, D_2)| \geq \sigma(K)/2$ und ebenso $|(D_3, D_4)| \geq \sigma(K)/2$

$\Rightarrow$ $|C_y| = |(Y, \bar{Y})| \geq |(D_1, D_2)| + |(D_3, D_4)| \geq \sigma(K)$

$\Rightarrow$ Jeder Cut von $G[A \cap B]$ hat mindestens $\sigma(K)$ Kanten

$\Rightarrow$ $G[A \cap B]$ ist Subcluster von Cluster K des Graphen G

□

Slicings

Definition

Die geordnete Partition der Kanten des Graphen G, $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$, ist ein Slicing von G falls für jedes Element C_i gilt:

$$C_i \text{ ist ein Cut } (A_i, \bar{A}_i) \text{ von } \begin{cases} G & \text{für } i = 1 \\ G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j & \text{für } i \in \{2, \ldots, m\} \end{cases}$$

Ein Element C_i des Slicings heißt auch Cut des Slicings.

Anmerkung: m ist hier nicht die Kantenanzahl.

Minimale und Narrow Slicings

Definition

Ein Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ von G, für das es keine echte Unterpartition gibt, die ein Slicing von G ist, ist ein minimales Slicing von G.

- Jeder Cut C_i eines minimalen Slicings muss ein minimaler Cut einer Komponente von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ sein.

Definition

Z ist ein Narrow Slicing von G, falls jeder Cut C_i ein Minimum Cut einer Komponente von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ ist.

Minimale und Narrow Slicings

Dynamische Interpretation:

- Slicing ist Sequenz von nicht-leeren Cuts, die G in isolierte Knoten teilen
- Minimale / Narrow Slicings verwenden nur Minimale / Minimum Cuts in jedem Schritt.
- Jedes Narrow Slicing ist auch ein Minimales Slicing (was umgekehrt nicht gilt).

Slicings

- nützlich: Slicing als sukzessive Zerlegung der Knotenmenge
- i-ter Cut $C_i = (A_i, \bar{A}_i)_i$ ist Cut von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$
- Da $A_i \cup \bar{A}_i = V(G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j) = V(G)$, betrifft $(A_i, \bar{A}_i)_i$ die gleiche Partition der Knoten von G wie der Cut $(A_i, \bar{A}_i)$ von G.
- Es gilt
$$(A_i, \bar{A}_i)_i = (A_i, \bar{A}_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$$
- Also enthält $(A_i, \bar{A}_i)_i$ nicht unbedingt alle Kanten des Cuts $(A_i, \bar{A}_i)$ von G für $i > 1$.
- Beachte: Kantenmenge $(A_i, \bar{A}_i)$ hängt implizit von G ab,
Kantenmenge $(A_i, \bar{A}_i)_i$ hängt implizit von G und Z ab.
Die Knotenpartition ist jedoch explizit und bei beiden gleich!

Knotenpartitionen

- Repräsentation der Cuts des Slicings als Knotenpartition von $V(G)$ bietet eine nützliche Charakterisierung von jedem Graphen $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ als Vereinigung von induzierten Teilgraphen von G
- Da C_1 die Knotenmenge A_1 von $\bar{A}_1$ separiert, und damit $G - C_1 = G[A_1] \cup G[\bar{A}_1]$, gilt somit:

$$G - (C_1 \cup C_2) = G[A_1 \cap A_2] \cup G[A_1 \cap \bar{A}_2] \cup G[\bar{A}_1 \cap A_2] \cup G[\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2]$$

Satz

Induktiv folgt: Sei $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ ein Slicing von G mit $C_i = (A_i, \bar{A}_i)_i$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dann gilt für $j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$G - \bigcup_{k=1}^{j} C_k = \bigcup \left\{ G\left[\bigcap_{i \in s} A_i \cap \bigcap_{i \notin s} \bar{A}_i \right] : s \subset \{1, 2, \ldots, j\} \right\}$$

Knotenpartitionen

- Jeder Graph G kann geschrieben werden als $G = G[P_1] \cup G[P_2] \cup \ldots \cup G[P_n]$, wobei jedes $G[P_i]$ eine Komponente von G ist.
- Sei dann $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ die Komponenten-Knoten-Partition von G.
- Falls G nicht zusammenhängend ist, können die induzierten Teilgraphen auf der rechten Seite im letzten Satz unzusammenhängend sein.
- Sei $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ ein Slicing von G, wobei G die Komponenten-Knoten-Partition $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ hat.
  Dann ist die Komponenten-Knoten-Partition von $G - \bigcup_{k=1}^{j} C_k =$

$$\bigcup \left\{ G \left[P_\ell \cap \bigcap_{i \in s} A_i \cap \bigcap_{i \notin s} \bar{A}_i \right] : 1 \leq \ell \leq n, s \subset \{1, 2, \ldots, j\} \right\}$$

Knotenpartitionen

- Beachte: die Komponenten-Knoten-Partition von $G - \bigcup_{k=1}^{j} C_k$ ist eine Subpartition der Komponenten-Knoten-Partition von $G - \bigcup_{k=1}^{j-1} C_k$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$.

$\Rightarrow$ Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ bewirkt eine geschachtelte Sequenz von $m + 1$ Knotensubpartitionen von der Komponenten-Knoten-Partition $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ bis hinunter zur minimalen Partition bestehend aus lauter einzelnen Knoten.

- Cut C_i des Slicings $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ kann einige Komponenten von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ intakt lassen.

$\Rightarrow$ sinnvoll: spezifizieren, welche Komponenten durch C_i wirklich zertrennt werden

Zertrennte Teilgraphen des Slicings

- Die Subgraphen $G_1, G_2, \ldots, G_m$ von G sind die durch das Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ zertrennten Teilgraphen, wenn jedes G_i genau die Komponenten von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ enthält, deren Knoten durch C_i separiert werden.
- Jeder vom Slicing Z zertrennte Teilgraph G_i ist dann eine Vereinigung von induzierten Teilgraphen von G.

- Da ein minimales Slicing nur sukzessive Cuts von individuellen Komponenten beinhaltet, gilt folgendes Korollar:

Knotenpartitionen

Folgerung

Die durch ein minimales Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ zertrennten Teilgraphen sind alle zusammenhängende induzierte Teilgraphen von G.

$\Rightarrow$ Die geschachtelte Sequenz von Komponenten-Knoten-Partitionen für ein minimales Slicing ist derart, dass jede Subpartition aus der vorhergehenden durch Aufspaltung von genau einem Teil hervorgeht.

$\Rightarrow$ entspricht demzufolge einer maximalen Kette im Verband der Komponenten-Knoten-Partitionen

Länge von Slicings

Definition

Sei die Länge $\ell(Z)$ eines Slicings Z des Graphen G die Anzahl der Cuts des Slicings (also die Kardinalität der Kantenpartition Z).

- Jeder Cut des Slicings erhöht die Anzahl der Zusammenhangskomponenten im Graphen.
- Diese Erhöhung ist genau dann immer gleich Eins, wenn die Cuts minimal sind (bzw. das Slicing ein minimales Slicing ist).

Satz

Für jeden Graphen G mit $|E(G)| \geq 1$ gilt:

$$\max\{\ell(Z) : Z \text{ ist Slicing von } G\} \; = \; |V(G)| - \#\text{Komponenten}(G)$$

und dieses Maximum wird genau von den minimalen Slicings erreicht.