

WS 2010/11

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2010WS/ds/uebung/>

10. November 2010

ZÜ III

Übersicht:

1. **Übungsbetrieb:** Datenkorrektheit, HA-Punkte im Tool
2. **Thema:** Überführung von Aussagen in Beweise
3. **Tipps** zu HA's von Blatt 4
4. **Vorbereitung** auf TA's Blatt 4:
Induktionsbeweis
Grenzwert und Wachstum von Funktionen

1. Übungsbetrieb

1.1 Datenkorrektheit im Tool

Häufige Fehler:

1. Vertauschung von Vorname und Familienname
2. Keine Matrikelnummer
3. Falsche Matrikelnummer

Überprüfung: Vergleich mit Studentenausweis.

Bitte korrigieren Sie Ihre Daten im Tool !

1.2 HA Punkte im Tool

Regel:

Die Eintragung der Hausaufgabenpunkte im Tool erfolgt in der Reihenfolge der Blätter. Eine Lücke in den Eintragungen wird als Nichtabgabe interpretiert.

Lücken bitte umgehend melden!

Melden Sie bitte umgehend der Übungsleitung per Mail, wenn Sie Lücken bei Ihren Eintragungen der **Hausaufgaben, die Sie abgegeben haben**, im Tool vorfinden.

2. Thema: Überführung von Aussagen in Beweise

$$A \Rightarrow B$$

Implikation

kann bewiesen werden durch

Annahme: Es gilt A .

Dann ist B beweisbar.

Inferenz

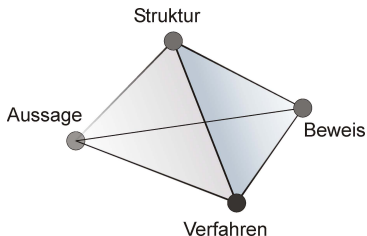
Analog: Beweis eines prädikatenlogischen Ausdrucks $\forall x P(x)$.

Aussagen können durch Verfahren (Vorgänge) interpretiert (bewiesen) werden und umgekehrt.

Struktur — Aussage — Beweis — Verfahren

stehen wechselseitig in Beziehung:

Tetraeder der Basisbegriffe



Informelle Präzisierung:

- **Struktur:** (Art der) Zusammenfassung (einer Vielheit) von (abstrakten) **Objekten**.
- **Verfahren:** (Art der) Zusammenfassung (einer Vielheit) von (abstrakten) **Vorgängen**.
- **Aussage:** Sprachliches Gebilde, für das es sinnvoll ist zu sagen, dass es **wahr oder falsch** ist. (*Aristoteles*)
- **Beweis:** Verfahren zur Bestimmung des Wahrheitswertes einer Aussage.

Die Begriffe 'Objekt' und 'Vorgang' bedingen sich gegenseitig. Jeder Vorgang führt zu einem Objekt als Ergebnis. Umgekehrt ist jedes Objekt das Ergebnis eines Vorgangs.

3. Tipps zu HA's von Blatt 4

- Definition für natürliche Zahlen m, n : $[m, n] = [n] \setminus [m - 1]$.
- Beschreibung von Äquivalenzrelationen durch Klassen.
- Nachweis der Korrektheit der Definition $f(a + b\sqrt{3}) = (a, b)$.
- Es gilt: $(x, y) \in R \circ (S \cup T) \iff (\exists z \in M) [xRz(S \cup T)y]$
- Beweis von HA 4 auch durch Auflösung der prädikatenlogischen Formeln möglich.

4. Vorbereitung auf TA's von Blatt 4

4.1 Induktionsbeweis

Mit einem Induktionsbeweis beweist man den Wahrheitswert einer **aufgezählten Menge von Aussagen**

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

durch eine **Aufzählung der Beweise** B_i für die Aussagen A_i

$$B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots .$$

Man beweist dabei die erste der Aussagen, d.h. A_1 , und eine Folgerung $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ für beliebiges $n \geq 1$.

Daraus ergibt sich dann eine Aufzählung der Beweise B_i .

Man beachte:

Die Variable n bedeutet lediglich den Index in der Aufzählung der Aussagen A_n bzw. Beweise B_n .

Selbstverständlich beginnt der Index einer Aufzählung bei 1 und ist **aufsteigend unendlich**.

Die Aussagen A_n haben stets die Form

Es gilt $P(n)$.

Dabei ist $P(n)$ ein Prädikat, das sich auf den Index n bezieht.

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen.

Die Gültigkeit einer Formel

$$(\forall n \in \mathbb{N}) [P(n)] \quad (1)$$

mit **vollständiger Induktion** zu beweisen, heißt,

anstatt (1) die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) [P(n) \Rightarrow P(n + 1)]. \quad (2)$$

Bemerkung: Das Prädikat $P(n)$ ist nicht identisch mit der Aussage, die man beweisen will. Die Frage der Anpassung des Schemas an z.B. absteigende Folgen ganzer Zahlen oder den Induktionsanfang stellt sich nicht.

Die Anpassung geschieht stets durch

Wahl eines geeigneten Prädikats.

Beim **Beweis der Formel (2)** geht man wie folgt vor.

Induktionsanfang: Es gilt $P(1)$:

...

Induktionsschritt: Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N}) [P(n) \Rightarrow P(n + 1)]$.

Der **Induktionsschritt** wird gezeigt durch:

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss: Dann gilt $P(n + 1)$:

...

Soweit das **Schema des Induktionsbeweises**.

VA 1

Zeigen Sie mit **vollständiger Induktion**

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$
die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1 + x)^m .$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an
und führen Sie den Induktionsbeweis
für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$
nach dem **angegebenen Schema** durch.

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$.

Wir definieren das Prädikat $P(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $P(n)$ genau dann wahr ist, wenn $1 + (n - 1)x \leq (1 + x)^{n-1}$ gilt, i.Z.

$$P(n) \quad :\iff \quad 1 + (n - 1)x \leq (1 + x)^{n-1}.$$

Dann haben wir zu zeigen

$$(\forall n \in \mathbb{N}) [P(n)].$$

Induktionsanfang : Es gilt $P(1)$:
 $P(1)$ bedeutet
 $1 + 0 \cdot x \leq (1 + x)^0$, d. h. $1 \leq 1$.
Also gilt $P(1)$.

Induktionsschritt : Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N}) [P(n) \Rightarrow P(n + 1)]$.

Der **Induktionsschritt** wird gezeigt durch:

Induktionsannahme : Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss : Es gilt $P(n + 1)$:

$$\begin{aligned}(1 + x)^n &= (1 + x)^{n-1}(1 + x) \\ &\geq (1 + (n-1)x)(1 + x) \quad \text{l.A. } P(n) \\ &= 1 + (n-1)x + x + (n-1)x^2 \\ &\geq 1 + nx. \quad \text{w.z.b.w.}\end{aligned}$$

4.2 Grenzwert und Wachstum von Funktionen

VA 2.1

- 1 Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Limes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Lösung:

Sei $f(n) = \frac{1}{n+1}$.

Dann haben wir also für die Folge $(f(n))_{n \in \mathbb{N}_0} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$

und $a = 0$ zu zeigen

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_\varepsilon) \left[\left| \frac{1}{n+1} - a \right| < \varepsilon \right].$$

Die hier anzuwendende **Beweistechnik** ist außerordentlich wichtig.

Sie besteht in der

schrittweisen Erfüllung des obigen prädikatenlogischen Ausdrucks von „links nach rechts“ gemäß der Klammerung

$$\forall \varepsilon > 0 \left[\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \left[\forall n \geq n_\varepsilon \left[\left| \frac{1}{n+1} - a \right| < \varepsilon \right] \right] \right] .$$

Als Erstes nehmen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ an.

Für dieses $\varepsilon > 0$ ist folgendes nachzuweisen.

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \left[\forall n \geq n_\varepsilon \left[\left| \frac{1}{n+1} - a \right| < \varepsilon \right] \right].$$

Existenzbeweise werden häufig konstruktiv geführt.

Wir konstruieren hier ein geeignetes n_ε wie folgt:

$$n_\varepsilon := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 17.$$

$\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ bedeutet die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $\frac{1}{\varepsilon}$ ist.

Nun müssen wir **zeigen**, dass gilt

$$\forall n \geq n_\varepsilon \left[\left| \frac{1}{n+1} - a \right| < \varepsilon \right].$$

Wir nehmen ein **beliebiges** n mit $n \geq n_\varepsilon$ an und haben zu **zeigen**:

$$\left| \frac{1}{n+1} - a \right| < \varepsilon.$$

Wegen $n \geq n_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 17$ gilt $n > \frac{1}{\varepsilon}$, mithin $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Mit $a = 0$ folgt

$$\left| \frac{1}{n+1} - a \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Damit sind wir mit dem **Beweis fertig**.

VA 2.2

Im Folgenden bezeichnet 1 die konstante Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert 1 besitzt.

- 2 Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Wachstums $o(f(n))$:

$$\frac{1}{n+1} \in o(1).$$

Lösung:

Sei $f(n) = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann haben wir zu zeigen

$$(\forall c > 0 \exists n_c \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_c) \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right].$$

Wieder erfüllen wir

schrittweise den obigen prädikatenlogischen Ausdruck von „links nach rechts“ gemäß der Klammerung

$$\forall c > 0 \left[\exists n_c \in \mathbb{N}_0 \left[\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right] \right] \right].$$

Als Erstes nehmen wir ein beliebiges $c > 0$ an.

Für dieses $c > 0$ ist Folgendes nachzuweisen.

$$\exists n_c \in \mathbb{N}_0 \left[\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right] \right] .$$

Den Existenzbeweis führen wir wieder konstruktiv.

Wir konstruieren ein geeignetes n_c wie folgt:

$$n_c := \left\lceil \frac{1}{c} \right\rceil + 17.$$

Nun müssen wir **zeigen**, dass gilt

$$\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right].$$

Wir nehmen ein **beliebiges** n mit $n \geq n_c$ an und haben zu **zeigen**:

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1.$$

Wegen $n \geq n_c = \lceil \frac{1}{c} \rceil + 17$ gilt $n > \frac{1}{c}$, mithin $\frac{1}{n} < c$.

Es folgt

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < c \cdot 1.$$

W.z.b.w.

VA 2.3

- 3 Man zeige: Für reellwertige Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 \iff f(n) \in o(1).$$

Lösung:

Tatsächlich müssen wir im Wesentlichen nur einige Bezeichnungen ersetzen.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 &\iff (\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_\varepsilon [|f(n) - 0| < \varepsilon]) \\ &\iff (\forall c > 0 \exists n_c \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_c [|f(n)| < c \cdot 1]) \\ &\iff f(n) \in o(1).\end{aligned}$$

Bemerkung:

Obiger Beweis ist ein Beispiel für **äquivalente Umformung** anstelle einer schrittweisen Auflösung der prädikatenlogischen Formel.