

WS 2010/11

# Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2010WS/ds/uebung/>

17. November 2010

# ZÜ IV

## Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Nichtabholung von HA's
2. Thema:  $R^*$  und  $\Sigma^*$ .
3. Vorbereitung auf TA's Blatt 5:  
Prädikatenlogische Verneinung (DeMorgan)  
Beweisarten  
Wachstum von Funktionen

# 1. Übungsbetrieb

## 1.1 Nicht abgeholte HA's

Nächster Abholungstermin:

Nicht abgeholte Hausaufgaben werden gesammelt und bei der letzten Zentralübung vor der Midterm am 8. Dezember im Hörsaal zur Abholung bereitgelegt.

## 2. Thema

### 2.1 $R^*$ und $\Sigma^*$

Zur Erinnerung:

$R^*$  bezeichnet die reflexive transitive Hülle einer Relation  $R \subseteq M \times M$ .  
(Siehe Blatt 2, TA 1)

$\Sigma^*$  bezeichnet die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet  $\Sigma$  oder Kleenesche Hülle von  $\Sigma$ .  
(Siehe Blatt 3, HA 3)

Bemerkung:

Beide Begriffe gibt es gleichlautend auch in der Einführung Info 1.

## 2.2 Gleichungen

Es gilt:

$$R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n \quad \text{mit}$$

$$R^0 = id_M,$$

$$\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} W^n \quad \text{mit}$$

$$W_0 = \{\epsilon\},$$

$$W_n = \{x_1 x_2 \dots x_n; x_i \in \Sigma\}.$$

## 3. Vorbereitung auf TA's Blatt 5

### 3.1 VA 1, Prädikatenlogik

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum  $\mathbb{R}$ .

- 1 Wir nehmen an, dass für einstellige Prädikate  $P$  und  $Q$  die folgende Aussage gilt:

$$(\exists x)[P(x)] \wedge (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

Man zeige, dass dann  $(\exists x)[Q(x)]$  folgt.

## Lösung:

Wir lösen die Formeln schrittweise auf und fügen anschließend die zu beweisende Formel zusammen.

Nach Voraussetzung gilt die Aussage

$$(\exists x)[P(x)].$$

Deshalb können wir von einem  $a \in \mathbb{R}$  mit Eigenschaft  $P(a)$  als ein bereits bestimmtes Element ausgehen. Von diesem  $a$  ist allerdings nur bekannt, dass  $P(a)$  gilt.

Sei also  $a \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $P(a)$ .

Da die Aussage

$$(\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

ebenfalls gilt, bedeutet dies für das bestimmte  $a$ , dass die Aussage

$$[P(a) \Rightarrow Q(a)]$$

gilt.

Es gelten also die beiden Aussagen  $P(a)$  und  $[P(a) \Rightarrow Q(a)]$ .

Daraus können wir mit Modus ponens folgern, dass

$$Q(a)$$

gilt.

Da wir nun sozusagen ein Element  $a$  konstruiert haben, für das  $Q(a)$  gilt, haben wir bewiesen, dass die Aussage

$$(\exists x)[Q(x)]$$

gilt.

W.z.b.w.



- ② Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat  $P$  die folgende Aussage  $F$  gilt:

$$(\forall x \exists y \forall z) [P(x, y, z)].$$

Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel her, die zu

$$\neg F$$

äquivalent ist.

## Lösung:

Wenn *nicht* für alle  $x \in \mathbb{R}$   
die Eigenschaft  $Q(x)$  gilt,  
dann ist dies gleichbedeutend damit, dass

für mindestens ein  $x \in \mathbb{R}$   
die Eigenschaft  $Q(x)$  *nicht* gilt.

Für alle Formeln  $(\forall x)[Q(x)]$  gilt also

$$\neg(\forall x)[Q(x)] \equiv (\exists x)[\neg Q(x)].$$

**Achtung:** die Formel  $\neg(\forall x)[Q(x)]$  ist nicht in pränexer Form.

Wir wenden diese Umformungsregel (nach DeMorgan) nun auf  $\neg F$  an wie folgt.

$$\begin{aligned}\neg F &\equiv \neg(\forall x) [\exists y [\forall z [P(x, y, z)]]] \\ &\equiv \exists x [\neg(\exists y) [\forall z [P(x, y, z)]]] \\ &\equiv \exists x [\forall y [\neg(\forall z) [P(x, y, z)]]] \\ &\equiv \exists x [\forall y [\exists z [\neg P(x, y, z)]]] \\ &\equiv (\exists x \forall y \exists z) [\neg P(x, y, z)].\end{aligned}$$

## 3.2 VA 2, Beweisarten

### ① *Direkter Beweis:*

Geben Sie für die folgende Aussage einen direkten Beweis an.

Das arithmetische Mittel  $b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$  von  $n$  Zahlen  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  bleibt unverändert, falls die Folge der  $a_i$  mit beliebig vielen  $b$ 's erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{n+m} \left( \sum_{i=1}^n a_i + m \cdot b \right).$$

*Bemerkung:*

Auch leeren Summen wird ein Wert zugewiesen, und zwar das jeweilige „neutrale“ Element der Operation, d. h. hier 0 für die leere Summe.

Eine leere Summe liegt z. B. immer dann vor, wenn der Laufindex  $i$  bei  $i_0$  beginnt, aber  $n < i_0$  gilt, d. h. wir setzen  $i_0 \leq i \leq n$  voraus.

## Lösung:

Intuitiv ist klar, dass die Hinzunahme des Wertes des arithmetischen Mittels zu den Werten, über die das Mittel gebildet wird, das Mittel selbst nicht verändert.

Die entsprechende Rechnung ist wie folgt.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+m} \left( \sum_{i=1}^n a_i + m \cdot b \right) &= \frac{1}{n+m} \left( \sum_{i=1}^n a_i + m \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \\ &= \frac{1}{n+m} \left( 1 + \frac{m}{n} \right) \sum_{i=1}^n a_i \\ &= \frac{1}{n+m} \left( \frac{n+m}{n} \right) \sum_{i=1}^n a_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.\end{aligned}$$

② *Indirekter Beweis:*

Es seien  $m, n, k \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen mit  $m > n \cdot k$ .

Zeigen Sie:

Verteilt man  $m$  Hamster auf  $n$  Käfige, so befinden sich in mindestens einem Käfig  $k + 1$  oder mehr Hamster.

Führen Sie einen **indirekten Beweis**, indem Sie annehmen, in allen Käfigen würden sich nach einer Verteilung weniger als  $k + 1$  Hamster befinden.

## Lösung:

Die Voraussetzung  $m > n \cdot k$  bezeichnen wir als Aussage  $A$ .

Wir bezeichnen die Anzahl der in Käfig  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) befindlichen Hamster als  $h_i$ .

Zu zeigen ist dann die Aussage  $B$  mit

$$B = (\exists i, 1 \leq i \leq n) [h_i \geq k + 1].$$

Insgesamt haben wir also die Implikation  $A \Rightarrow B$  zu zeigen.



### Indirekter Beweis:

Wir zeigen die Kontraposition von  $A \Rightarrow B$ , d. h.

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

Annahme: Es gelte  $\neg B$ , d. h., für alle  $i$  gelte  $h_i < k + 1$ .

Wegen  $h_i \leq k$  schätzen wir die Gesamtzahl  $m$  aller Hamster in den Käfigen ab mit

$$m = \sum_{i=1}^n h_i \leq \sum_{i=1}^n k = n \cdot k.$$

Damit ist die Negation der Voraussetzung  $m > n \cdot k$  **gezeigt**, mithin Aussage  $\neg A$ .

③ *Schubfachprinzip:*

Lassen sich obige Aussagen auch mit dem „Schubfachprinzip“ beweisen?

Antwort:

Das Schubfachprinzip beweist eine Existenzaussage ohne Konstruktion eines bestimmten Elements, wie z.B.:

Es gibt einen Käfig, in dem mehr als  $k$  Hamster sitzen.

Die Teilaufgabe 2 kann sehr gut mit dem Schubfachprinzip bewiesen werden.

Dazu definiert man eine Abbildung  $f$ , die die Menge der  $m$  Hamster in die Menge der  $n$  Käfige abbildet.

Aussagen der Art, dass ein Beweis mit einer bestimmten Struktur nicht existiert, sind im Allgemeinen falsch.

Trotzdem bietet sich für den erstgenannten direkten Beweis keine Anwendung des Schubfachprinzips an, weil er auf keine derartige Existenzaussage abzielt.

Teilaufgabe 1 ist für die Anwendung des Prinzips **nicht geeignet**.

### 3.3 VA 3, Wachstum

- 1 Man zeige:

$$(\log n^2)^2 \in o(2^{\ln n}).$$

$\log$  ohne Angabe der Basis bedeutet, dass die Formel für alle zulässigen Basen zu beweisen ist.

## Lösung:

Es ist zu zeigen:

$$(\forall c > 0 \exists n_c \in \mathbb{N} \forall n \geq n_c) \left[ |(\log n^2)^2| < c \cdot 2^{\ln n} \right].$$

Sei  $b$  eine beliebige zulässige Basis.

Wir lösen die Formel schrittweise auf.

Sei  $c$  eine beliebige reelle Zahl mit  $c > 0$ .

Nun konstruieren wir ein natürliche Zahl  $n_c$ , so dass gilt

$$(\forall n \geq n_c) [(\log n^2)^2 < c \cdot 2^{\ln n}].$$

Umformung:

$$(\log_b n^2)^2 = \frac{4}{(\ln b)^2} \cdot (\ln n)^2 < c \cdot 2^{\ln n}.$$

Wir bezeichnen  $\ln n$  mit  $x$ ,

d.h. wir setzen  $x = \ln n$ ,

und wir setzen  $k = \frac{4}{(\ln b)^2}$ .

Nun benutzen wir die Ungleichung  $x^3 < 2^x$  für  $x \geq 10$ .

Die Ungleichung folgt leicht aus  $3 \ln x < x \ln 2$  für  $x \geq 10$ .

Dann gilt für  $x \geq 10$  und  $\frac{k}{x} \leq c$

$$k \cdot x^2 = \frac{k}{x} \cdot x^3 < c \cdot 2^x.$$

Nun setzen wir  $x_c = \max\{10, \frac{k}{c}\}$  und  $n_c = \lceil e^{x_c} \rceil$

und erhalten für alle  $n \geq n_c$  die gewünschte Ungleichung.



- 3 Sei  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$ .

Man zeige  $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$ .

## Lösung:

Es ist zu zeigen

$$(\exists c > 0 \exists n_c \in \mathbb{N} \forall x \geq n_c) [|f(x)| \leq c \cdot x^n].$$

Es gelten für alle  $x \geq 1$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left| \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \right| \leq \sum_{i=0}^n |a_i| \cdot x^i \\ &\leq x^n \cdot \left( \sum_{i=0}^n |a_i| \cdot x^{i-n} \right) \leq x^n \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^n |a_i|}_{=:c} \end{aligned}$$

Wir können beispielsweise  $c = \sum_{i=0}^n |a_i|$  und  $n_c = 2$  setzen.