
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 7. Dezember 2010, 10 Uhr in die DS Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Für die e -Funktion gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichungen $e^0 = 1$, $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ und die Ungleichung $x + 1 \leq e^x$. Tatsächlich gibt es eine und nur eine Funktion, die diese Eigenschaften besitzt.

1. Zeigen Sie zunächst für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $(1+x)^n \leq e^{nx}$ und leiten Sie daraus die folgende Aussage ab:

Für alle $x \geq -n$ gilt

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

2. Zeigen Sie, dass alle Polynome $p(x)$ beliebigen Grades für $x \rightarrow +\infty$ langsamer wachsen als e^x , d.h. $p(x) \in o(e^x)$.
3. **Zusatzaufgabe** (0 Punkte): Die Polynome $p(x) = \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n$ nähern sich für wachsendes n der e -Funktion.

Machen Sie diesen Sachverhalt graphisch deutlich, indem Sie mit Maple die e -Funktion und für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ die Polynome $p(x) = \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n$ in einem geeigneten Bereich für x graphisch darstellen.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $M = \{a, b, c, d\}$ mit $|M| = 4$. Wir betrachten injektive Abbildungen $f : M \rightarrow M$ mit der Eigenschaft, dass es (mindestens) zwei Fixpunkte $x \in M$ gibt, d. h. Elemente x , für die $f(x) = x$ gilt.

Wieviele Abbildungen $f : M \rightarrow M$ mit mindestens zwei Fixpunkten gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort durch Auflistung aller Abbildungen mit dieser Eigenschaft!

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir fassen die aussagenlogischen Werte t (wahr) und f (falsch) zur booleschen Menge $\mathbb{B} = \{t, f\}$ zusammen und betrachten den aussagenlogischen Operator $\otimes : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ des „ausschließenden Oder“ (gleichbedeutend mit \neq).

1. Zeigen Sie die Kommutativität und die Assoziativität von \otimes , d.h. $x \otimes y \equiv y \otimes x$ und $(x \otimes y) \otimes z \equiv x \otimes (y \otimes z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{B}$, durch Auswertung der entsprechenden Wahrheitstabellen.

2. Wir betrachten die Algebra $A = \langle \mathbb{B}, \otimes \rangle$. Geben Sie einen Isomorphismus f von A auf Z_2 an und beweisen Sie die entsprechende Homomorphieeigenschaft für f .

Warum folgt bereits aus der Existenz des Isomorphismus f die Kommutativität und Assoziativität der Verknüpfung \otimes ? Beweis!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $-7 \equiv 8 \pmod{3}$.
2. $2^{16} \pmod{3} = 2$, $2^{33} \pmod{3} = 2$, $2^{1600} \pmod{3} = 1$.
3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 \pmod{(n+1)} = 1$.
4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(n \pmod{2}) \pmod{7} = (n \pmod{7}) \pmod{2}$.
5. Sei \div die ganzzahlige Division. Dann gilt $(-10) \div 4 = -3$.

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

1. Man zeige:

In einem beliebigen Ring $\langle R, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$ gelten die folgenden Gleichungen.

$$a \odot 0 = 0 \odot a = 0, \quad a \odot b = (-a) \odot (-b).$$

2. Geben Sie zwei nichtkommutative Ringe an.

Vorbereitung 2

Beweisen Sie:

1. Es gibt bis auf Isomorphie genau einen Ring $R = \langle S, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$ mit drei Elementen, d. h. $S = \{0, 1, a\}$. Insbesondere also muss R isomorph sein zum Ring $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3, 0, 1 \rangle$.
2. Der Ring $R = \langle S, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$ mit drei Elementen ist ein Körper.
3. Sei t_x die Anzahl der *co*-Nullteiler eines Ringelementes $x \in S \setminus \{0\}$ eines endlichen, kommutativen Ringes $\langle S, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$.

Dann ist $t_x + 1$ ein Teiler der Anzahl $n = |S|$ aller Ringelemente.

Dabei heiÙe $y \in S \setminus \{0\}$ *co*-Nullteiler von $x \in S \setminus \{0\}$, falls $x \odot y = 0$.

Vorbereitung 3

In gewissen kommutativen Ringen $R = \langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ stellt sich der erweiterte Euklidische Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers $ggT(a, b)$ zweier Elemente $a \in S$ und $b \in S$ dar als eine iterierte Transformation (Matrixmultiplikation) Q_i angewandt auf Δ_{i-1} wie folgt mit $r_0 = a$ und $r_1 = b$.

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \Delta_i = \begin{pmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = Q_i \Delta_{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix}, \quad i := 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}.$$

Dabei werden die Quotienten q_i so gewählt (geschätzt), dass die Δ_i mit wachsendem i in einem gewissen Sinn stets echt kleiner werden. Eine Berechnung wird beendet, wenn die Folge der Δ_i maximale Länge besitzt, d. h. wenn kein Quotient existiert, der die Bildung eines noch kleineren Restes erlaubt. Zur Bemessung der Größe von Elementen eines Ringes dient beispielweise im Ring der ganzen Zahlen $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ die Betragsfunktion. In Polynomringen wird der Grad eines Polynoms verwendet.

Wir betrachten im Folgenden den Ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ der ganzen Zahlen.

1. Zeigen Sie für alle entsprechenden i

$$ggT(a, b) = ggT(r_i, r_{i+1}).$$

2. Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den $ggT(10800, 122)$.

Tutoraufgabe 1

$\langle \mathbb{Z}_n^*, \cdot_n \rangle$ mit $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x < n \text{ und } \text{ggT}(x, n) = 1\}$ und $n > 1$ ist bekanntlich eine Gruppe.

1. Zeigen Sie, dass $\langle \mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12} \rangle$ nicht zyklisch ist!
2. Welche Untergruppen besitzt $\langle \mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12} \rangle$? Begründung!

Tutoraufgabe 2

1. Die Charakteristik eines Körpers K , i. Z. $\text{char}(K)$, ist definiert als die Ordnung des Elements 1 in der additiven Gruppe von K . Man zeige:

$$p = \text{char}(K) \in \mathbb{N} \Rightarrow p \text{ ist eine Primzahl.}$$

2. Geben Sie die Verknüpfungstabellen eines Körpers mit 4 Elementen an. Welche Charakteristik hat dieser Körper?

Begründen Sie Ihre Angaben!

Tutoraufgabe 3

Berechnen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus ganze Zahlen m, n , so dass

$$81m + 128n = 1.$$