
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 1. Februar 2011, 10 Uhr in die DS Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Benutzen Sie die Stirling'sche Formel zum Beweis der Aussage

$$\binom{2n}{n} \in \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Zu einer Party kommen n Gäste. Es bilden sich Gruppen, in denen die Gäste im Kreis stehen. Jede Gruppe besteht aus mindestens einem Gast und es bilden sich k Gruppen. Wenn in einer Gruppe mehr als zwei Gäste stehen, dann hat jeder Gast einen linken und einen rechten Gesprächspartner. Zwei Gruppenverteilungen werden als gleich angesehen, wenn jeder Gast die gleichen Nachbarn hat, wobei es aber ein Unterschied sein soll, ob eine bestimmte Person ein linker oder rechter Nachbar einer anderen Person ist.

1. Wie viele Gruppenverteilungen gibt es, wenn der Gastgeber zunächst nicht dabei ist? Wie viele Gruppenverteilungen gibt es, wenn der Gastgeber nicht dabei ist und in jeder Gruppe mindestens 2 Gäste stehen.
2. Der Gastgeber schließt sich nun einer der k Gruppen an. Wie viele Gruppenverteilungen gibt es jetzt?
3. Wir nehmen an, dass ein Pärchen unter den Gästen ist, das auf jeden Fall nebeneinander sitzen bzw. stehen will. Wie viele Gruppenverteilungen gibt es jetzt bei k Gruppen (der Gastgeber sei nicht dabei)?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Ermitteln Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für die folgenden Summen für $n \geq 1$ eine geschlossene Form mit Parameter n .

$$(i) \quad S_1 = \sum_{k=1}^n k \cdot (k-1) \cdot 2^k. \quad (ii) \quad S_2 = \sum_{k=1}^n 9k4^k.$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie durch Anwendung der Binomialinversion eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, so dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$n! = \sum_{k=0}^n (-n)^{\overline{k}} a_k.$$

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

Seien $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Weiter seien $A(z)$ und $B(z)$ entsprechend ihre erzeugenden Funktionen, d.h.

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{bzw.} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Zeigen Sie, dass die nachfolgend angegebenen Folgen $(c_n)_{n \geq 0}$ und ihre erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jeweils die angegebene Beziehung erfüllen.

1. Mit $c_n := a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = A(z) + B(z)$.
2. Mit $c_n := a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{1}{z}(A(z) - a_0)$.
3. Mit $c_0 := 0$ und $c_n := a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $C(z) = z \cdot A(z)$.
4. Mit $c_n := (n+1) \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{d}{dz}(z \cdot A(z))$.
5. Mit $c_n := n \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = z \cdot \frac{d}{dz}A(z)$.
6. Mit $c_n := \sum_{i=0}^n a_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{A(z)}{1-z}$.
7. Mit $c_n := \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = A(z) \cdot B(z)$.

Vorbereitung 2

Gegeben sei die Funktion

$$F(z) = \frac{z^2 + 3z - 5}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6}.$$

Bestimmen Sie die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, zu der $F(z)$ die erzeugende Funktion darstellt.

Vorbereitung 3

Bearbeiten Sie Arbeitsblatt 3 über die Lösung von Rekursionsgleichungen.

Tutoraufgabe 1

- Gegeben sei die Rekursionsgleichung $f_n - 4f_{n-1} + 4f_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2$ mit variablen Anfangsbedingungen $f_0 = a$ und $f_1 = b$.
 - Bestimmen Sie die entsprechende vollständige Rekursion (siehe Arbeitsblatt 3).
 - Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Rekursionsgleichung.
 - Zeigen Sie, dass $F(z) = \frac{a+(b-4a)z}{1-4z+4z^2}$ die Erzeugendenfunktion zur Rekursionsgleichung ist.
 - Zeigen Sie, dass $f_n = \left(\frac{b}{2} - a\right)n + a \cdot 2^n$ gilt für alle $n \geq 0$.
- Sei a_n für $n \geq 0$ definiert durch $a_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$. Zeigen Sie, dass stets $a_n \in \mathbb{N}$ gilt, und geben Sie eine möglichst einfache Rekursionsgleichung für die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ an.

Tutoraufgabe 2

Gegeben sei die inhomogene lineare Rekursion für eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$

$$f_{n+1} + 3 \cdot f_n = n \cdot 2^n, \quad \forall n \geq 0. \quad (1)$$

- Leiten Sie für $s_n = n \cdot 2^n$ eine Rekursion der folgenden Form her

$$s_{n+2} + a \cdot s_{n+1} + b \cdot s_n = 0, \quad \forall n \geq 0 \quad (2)$$

und bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$.

- Leiten Sie durch geeignete Substitution aus den Gleichungen (1) und (2) eine homogene Rekursion für $(f_n)_{n \geq 0}$ der folgenden Form her

$$f_{n+3} + q_1 \cdot f_{n+2} + q_2 \cdot f_{n+1} + q_3 \cdot f_n = 0, \quad \forall n \geq 0 \quad (3)$$

und bestimmen Sie $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$.

- Geben Sie die allgemeine Lösung der Rekursion (3) an.
- Lösen Sie die Rekursion (1) mit Nebenbedingung $f_0 = 1$. Geben Sie die erzeugende Funktion der erhaltenen Lösung an.

Tutoraufgabe 3

Stellen Sie zur Lösung der folgenden Aufgaben zunächst eine homogene bzw. inhomogene lineare Rekursionsgleichung auf.

- n Personen (Informatikstudenten I, Mathematikstudenten M oder Professoren P) rutschen hintereinander in einer der Rutschen im FMI-Gebäude. Wir unterscheiden die Personen nur insofern, als sie verschiedenen Gruppen I, M oder P angehören.
 - Wie viele Möglichkeiten von „Rutschreihenfolgen“ gibt es, wenn nicht zwei Professoren hintereinander rutschen dürfen?
 - Wie viele Möglichkeiten von „Rutschreihenfolgen“ gibt es, wenn die Anzahl der Professoren gerade sein soll?
- Wie viele Teilmengen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ gibt es, die keine drei aufeinander folgende Zahlen enthalten?