

---

## Diskrete Strukturen

---

*Abgabetermin: 11. Februar 2011, 14 Uhr in die DS Briefkästen*

*Hinweis:* Blatt 14 ist das letzte DS Übungsblatt in diesem Semester. Es enthält insbesondere die Hausaufgaben für die beiden letzten Vorlesungswochen.

### Hausaufgabe 1 (3 Punkte)

Wir betrachten die Rekursionsgleichung für Folgen  $(f_n)_{n \geq 0}$

$$f_{n+3} - 6f_{n+2} + 12f_{n+1} - 8f_n = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

1. Geben Sie die allgemeine Lösung der Rekursionsgleichung in geschlossener Form für  $f_n$  in Abhängigkeit von geeigneten Parametern an.
2. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung, so dass gilt

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und} \quad (f_n)_{n \geq 0} \in \Theta(n2^n).$$

### Hausaufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben sei die lineare Rekursion für Folgen  $(f_n)_{n \geq 0}$

$$f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n = 0, \quad \forall n \geq 0$$

mit variablen Anfangsbedingungen  $f_0 = a, f_1 = b, f_2 = c$ .

1. Bestimmen Sie mit Hilfe vollständiger Rekursion die erzeugende Funktion und die allgemeine Lösung der Rekursion in Abhängigkeit von  $a, b$  und  $c$ .
2. Bestimmen Sie die Werte von  $a, b$  und  $c$ , für die die Rekursion eine konstante Lösung besitzt, d. h.  $f_n = \gamma$  für alle  $n \geq 0$  in Abhängigkeit eines fest gewählten  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

### Hausaufgabe 3 (3 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass jeder (einfache) Graph mit Gradfolge  $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$  zusammenhängend ist. Wie viele Kanten besitzt jeder solche Graph?
2. Geben Sie 2 nicht isomorphe (einfache) Graphen an mit Gradfolge  $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$ . Begründung!
3. Zeigen Sie, dass es keinen bipartiten Graphen mit Gradfolge  $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$  gibt.

### Hausaufgabe 4 (3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Seien  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph und  $E' \subseteq E$ ,  $V' \subseteq V$  nichtleere Mengen. Dann ist  $T = (V', E')$  ein Teilgraph von  $G$ .
2. Jeder (zusammenhängende oder unzusammenhängende) einfache Graph, dessen Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E$  die Gleichung  $|V| = |E| + 1$  erfüllt, ist planar.
3. Der Baum mit Prüfer-Code  $(5, 5, 5)$  besitzt die Gradfolge  $(4, 1, 1, 1, 1)$ .

### Hausaufgabe 5 (3 Punkte)

1. Gegeben sei der Baum  $B = ([8], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{6, 3\}, \{7, 2\}, \{8, 1\}\})$ . Bestimmen Sie den Prüfer-Code von  $B$ .
2. Geben Sie (zeichnerisch) den Baum an, der durch den Prüfer-Code  $(2, 3, 4, 3, 4)$  dargestellt wird.

### Hausaufgabe 6 (3 Punkte)

Wir nennen einen einfachen, ungerichteten Graph mit mindestens 4 Knoten „fast-4-regulär“, wenn alle Knoten vom Grad 4 sind außer 4 Knoten, die vom Grad 2 sind.

Wir betrachten im Folgenden einfache bipartite Graphen  $G = (A, B, E)$ .

Man zeige:

1. Es gibt bis auf Isomorphie einen einzigen fast-4-regulären bipartiten Graph  $G$  mit 6 Knoten, und dieser Graph ist planar.
2. Für alle  $n \geq 1$  gibt es einen planaren, fast-4-regulären bipartiten Graph  $G = (A, B, E)$  mit  $|A| = |B| = 2n$ .

Führen Sie den Beweis durch Induktion über  $n$ . Der Induktionsschritt von  $n$  auf  $n + 1$  kann durch Zeichnung klargemacht werden.

### Hausaufgabe 7 (2 Punkte)

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Kanten in den folgenden Graphen:  $K_6$ ,  $K_{3,4}$ ,  $P_4$ ,  $C_5$ ,  $M_{3,2}$ ,  $T_{3,3}$ ,  $Q_8$ .
2. Zeigen Sie, dass der Petersen-Graph mehr als 10 Spannbäume besitzt?

---

**Hinweis:** Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

---

## Vorbereitung 1

Die Gradfolge eines einfachen ungerichteten Graphen  $G$  mit Knotenmenge  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade  $d(v_i)$ .

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?  
i)  $(2, 1, 0)$ .                      ii)  $(3, 3, 3, 3, 2, 2)$ .                      iii)  $(3, 3, 3, 2, 2, 2)$ .
2. Beweisen oder widerlegen Sie:  
i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.  
ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

## Vorbereitung 2

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graphen  $K_{3,3}$ .

1. Geben Sie 2 Unterteilungen des  $K_{3,3}$  mit 7 bzw. 8 Knoten an.
2. Man beweise: Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

## Vorbereitung 3

1. Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch? Begründung!
2. Zeigen Sie, dass jeder Baum  $T = (V, E)$ , für den  $|V| > 2$  und für alle  $v \in V$   $\deg(v) \neq 2$  gilt, einen Knoten  $v_0$  enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet  $\deg(v)$  den Grad von  $v$ .  
Hinweis: Entfernen Sie die Blätter eines Baumes.
3. Jeder Baum ist bipartit. Beweis!
4. Jeder  $k$ -reguläre Graph mit  $k \geq 2$  enthält einen Kreis. Beweis!
5. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!

## Vorbereitung 4

1. Gegeben seien die Bäume  
 $B_1 = ([9], \{\{1, 9\}, \{2, 9\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{8, 3\}, \{6, 7\}, \{7, 9\}, \{3, 9\}\})$ ,  
 $B_2 = ([9], \{\{2, 1\}, \{1, 7\}, \{5, 3\}, \{4, 1\}, \{7, 3\}, \{9, 3\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}\})$ .  
Bestimmen Sie zu  $B_1$  und  $B_2$  jeweils den Prüfer-Code.
2. Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.  
i)  $(6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)$ ,      ii)  $(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1)$ ,      iii)  $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ .

## Vorbereitung 5

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. In jedem nichtleeren planaren Graphen gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.
2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graphen.

## Tutoraufgabe 1

1. Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph mit den bipartiten Zerlegungen  $B_1 = (U_1, U_2, E)$  und  $B_2 = (V_1, V_2, E)$ , so dass  $U_1 \neq V_1$ ,  $U_1 \neq V_2$  gilt.

Zeigen Sie, dass  $G$  zwei verschiedene Komponenten besitzt.

2. Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph. Dann gilt  $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$ . Beweis!

## Tutoraufgabe 2

Eine Brücke in einem zusammenhängenden einfachen Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Kante  $e \in E$ , so dass  $G' = (V, E \setminus \{e\})$  nicht mehr zusammenhängend ist. Man zeige:

1. Ein Graph, in dem alle Knoten einen geraden Grad haben, enthält keine Brücke.
2. Eine Kante ist genau dann eine Brücke, wenn sie auf keinem Kreis liegt.

## Tutoraufgabe 3

Es sei  $G = (V, E)$  ein nichtleerer Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1.  $G$  ist ein Baum.
2.  $G$  ist maximal kreisfrei. Das bedeutet, dass  $G$  kreisfrei ist und es für jede Kante  $e \in \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \setminus E$  im Graph  $(V, E \cup \{e\})$  einen Kreis gibt.
3.  $G$  ist minimal zusammenhängend. D. h.,  $G$  ist zusammenhängend und für jede Kante  $e \in E$  ist der Graph  $(V, E \setminus \{e\})$  nicht zusammenhängend.

## Tutoraufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie, u. a. mit Hilfe des Satzes von Kuratowski, die folgenden Aussagen.

1. Es ist möglich, drei Häuser mit Strom, Gas und Wasser zu versorgen, wenn die Leitungen alle ebenerdig verlaufen müssen und sich nicht schneiden dürfen.
2. Wenn man zu einem beliebigen Baum  $G = (V, E)$  einen neuen Knoten  $v$  hinzufügt und  $v$  mit allen Knoten in  $V$  verbindet, so ist der entstehende Graph planar.

## Tutoraufgabe 5

Sei  $G = (V, E)$  ein dreiecksfreier Graph, d. h.  $G$  enthalte keinen  $K_3$  als Teilgraphen. Sei  $G$  planar.

1. Zeigen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel:  $|E| < 2|V|$ .

Hinweis: Beachten Sie, dass die Polyederformel zunächst nur auf Komponenten von  $G$  anwendbar ist.

2. Beweisen Sie: Falls  $G$  unzusammenhängend ist, dann besitzt  $G$  zwei Knoten vom Grad höchstens 3.