Beweis (Forts.):

Laufzeitanalyse:

$C :=$ Anzahl der Vergleiche

$P :=$ Anzahl der Paare in U

i) In der Phase 1 gilt folgende Invariante: $C - P + 2|U| \geq 2n$.
Dies wird durch vollständige Induktion gezeigt:
Induktionsanfang: $0 - 0 + 2n \geq 2n$;
Induktionsschritt: Gemäß der Tabelle.

ii) Sei C die Anzahl der Vergleiche am Ende der Phase 1. In der Phase 2 werden noch $\geq |U| - 1 - |P|$ Vergleiche nötig. Die Anzahl der Vergleiche für alle Phasen ist damit

$$\geq C + |U| - 1 - |P|\,.$$

Beweis (Forts.):

Am Ende der Phase 1 gilt ja $C \geq 2n + |P| - 2|U|$ (wg. Invariante). Damit gilt für die Anzahl der Vergleiche:

$$\begin{aligned}\geq 2n + |P| - 2|U| + |U| - 1 - |P| &= 2n - |U| - 1 \\ &\geq \frac{3}{2}n - \frac{3}{2} = \\ &= \left\lceil \frac{3}{2}n - 2 \right\rceil, \text{ da } |U| \leq \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

$\square$

6. Eine bessere untere Schranke

Satz 90

Sei T ein Entscheidungsbaum für die Bestimmung des i-kleinsten von n verschiedenen Elementen, mit $i^2 \geq \log\left[\binom{n}{i}\frac{1}{n-i+1}\right] + 3$. Dann gilt, wenn

$$p := 2\sqrt{\log\left[\binom{n}{i}\frac{1}{n-i+1}\right] + 3} - 2$$

gesetzt wird,

$$\textit{Höhe}(T) \geq \log\left[\binom{n}{i}\frac{2^{n-p}}{n-i+1}\right].$$

Bemerkung: $i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \to \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \Theta(\frac{2^n}{\sqrt{n}})$; also erhalten wir eine untere Schranke von Höhe$(T) \geq 2n - o(n)$ für die Bestimmung des Medians.

Beweis:

Der Beweis setzt sich aus einem Gegenspieler- und einem Abzählargument zusammen, um zu zeigen

„T hat viele Blätter.“

Sei A Teilmenge der Schlüssel, $|A| = i$. Wir konstruieren einen Teilbaum T_A von T, so dass alle Blätter von T_A auch Blätter von T sind, und zeigen: T_A hat viele Blätter (nämlich 2^{n-p}). Es gibt $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten, A zu wählen, jedes Blatt von T kommt in höchstens $n - i + 1$ T_A's vor.

Beweis (Forts.):

Beobachtungen:

Jedes Blatt w von T liefert folgende Informationen:

$$\begin{array}{lcl} \text{answer}(w) & \xrightarrow{\text{liefert}} & i\text{-kleinstes Element } x \\ \text{little}(w) & \xrightarrow{\text{liefert}} & i-1 \text{ Elemente } < x \\ \text{big}(w) & \xrightarrow{\text{liefert}} & n-i \text{ Elemente } > x \end{array}$$

Beweis (Forts.):

Wähle A als beliebige Teilmenge der n gegebenen Schlüssel, mit $|A| = i$. Wir geben für den Gegenspieler eine Strategie an, welche dazu führt, dass wir durch Zurechtschneiden aus T einen Baum T_A konstruieren können, so dass gilt:

- T_A ist Binärbaum
- jedes Blatt von T_A ist auch Blatt von T, d.h. durch das Zurechtschneiden entstehen keine zusätzlichen Blätter
- für jedes Blatt w von T_A gilt: little$(w) \subset A$