

3. Minimale Spannbäume

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph, der o.B.d.A. zusammenhängend ist. Sei weiter $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion auf den Kanten von G .

Wir setzen

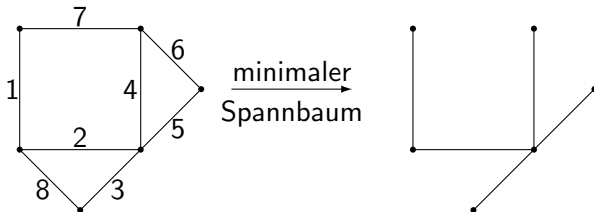
- $E' \subseteq E: w(E') = \sum_{e \in E'} w(e),$
- $T = (V', E')$ ein Teilgraph von $G: w(T) = w(E').$

Definition 99

T heißt **minimaler** Spannbaum (MSB, MST) von G , falls T Spannbaum von G ist und gilt:

$$w(T) \leq w(T') \text{ für alle Spannbäume } T' \text{ von } G.$$

Beispiel 100



Anwendungen:

- Telekom: Verbindungen der Telefonvermittlungen
- Leiterplatten

3.1 Konstruktion von minimalen Spann­bäumen

Es gibt zwei Prinzipien für die Konstruktion von minimalen Spann­bäumen (Tarjan):

- „blaue“ Regel
- „rote“ Regel

Satz 101

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion, $C = (V_1, V_2)$ ein Schnitt (d.h. $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$). Sei weiter $E_C = E \cap (V_1 \times V_2)$ die Menge der Kanten „über den Schnitt hinweg“. Dann gilt: („blaue“ Regel)

- 1 Ist $e \in E_C$ die **einzigste** Kante minimalen Gewichts (über alle Kanten in E_C), dann ist e in **jedem** minimalen Spannbaum für (G, w) enthalten.
- 2 Hat $e \in E_C$ minimales Gewicht (über alle Kanten in E_C), dann gibt es einen minimalen Spannbaum von (G, w) , der e enthält.

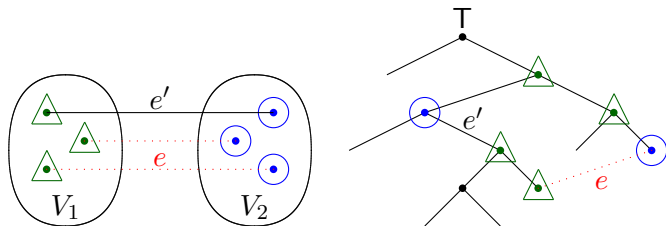
Beweis:

[durch Widerspruch]

- 1 Sei T ein minimaler Spannbaum von (G, w) , sei $e \in E_C$ die minimale Kante. Annahme: $e \notin T$. Da T Spannbaum $\Rightarrow T \cap E_C \neq \emptyset$.

Sei $T \cap E_C = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, $k \geq 1$. Dann enthält $T \cup \{e\}$ einen eindeutig bestimmten Kreis (den sogenannten durch e bzgl. T bestimmten Fundamentalkreis). Dieser Kreis muss mindestens eine Kante $\in E_C \cap T$ enthalten, da die beiden Endpunkte von e auf verschiedenen Seiten des Schnitts C liegen.

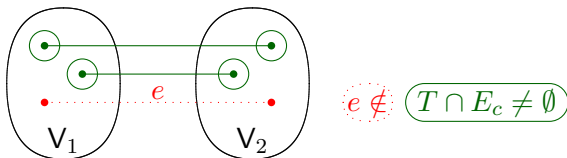
Beweis (Forts.):



Sei $e' \in E_C \cap T$. Dann gilt nach Voraussetzung $w(e') > w(e)$. Also ist $T' := T - \{e'\} \cup \{e\}$ ein Spannbaum von G , der echt kleineres Gewicht als T hat, Widerspruch zu „ T ist minimaler Spannbaum“.

Beweis (Forts.):

- ② Sei $e \in E_C$ minimal. Annahme: e kommt in **keinem** minimalen Spannbaum vor. Sei T ein beliebiger minimaler Spannbaum von (G, w) .



$e \notin T \cap E_C \neq \emptyset$. Sei $e' \in E_C \cap T$ eine Kante auf dem durch e bezüglich T erzeugten Fundamentalkreis. Dann ist $T' = T - \{e'\} \cup \{e\}$ wieder ein Spannbaum von G , und es ist $w(T') \leq w(T)$. Also ist T' minimaler Spannbaum und $e \in T'$.

□

Satz 102

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, gewichteter, zusammenhängender Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann gilt: („rote“ Regel)

- 1 Gibt es zu $e \in E$ einen Kreis C in G , der e enthält und $w(e) > w(e')$ für alle $e' \in C \setminus \{e\}$ erfüllt, dann kommt e in **keinem** minimalen Spannbaum vor.
- 2 Ist $C_1 = e_1, \dots, e_k$ ein Kreis in G und $w(e_i) = \max\{w(e_j); 1 \leq j \leq k\}$, dann gibt es einen minimalen Spannbaum, der e_i nicht enthält.

Beweis:

- 1 Nehmen wir an, dass es einen minimalen Spannbaum T gibt, der $e = \{v_1, v_2\}$ enthält. Wenn wir e aus T entfernen, so zerfällt T in zwei nicht zusammenhängende Teilbäume T_1 und T_2 mit $v_i \in T_i$, $i = 1, 2$. Da aber e auf einem Kreis in G liegt, muss es einen Weg von v_1 nach v_2 geben, der e nicht benützt. Mithin gibt es eine Kante $\hat{e} \neq e$ auf diesem Weg, die einen Knoten in T_1 mit T_2 verbindet. Verbinden wir T_1 und T_2 entlang \hat{e} , so erhalten wir einen von T verschiedenen Spannbaum \hat{T} . Wegen $w(\hat{e}) < w(e)$ folgt $w(\hat{T}) < w(T)$, im Widerspruch zur Minimalität von T .

Beweis (Forts.):

- ② Wir nehmen an, e_i liege in jedem minimalen Spannbaum (MSB) von G , und zeigen die Behauptung durch Widerspruch.

Sei T ein beliebiger MSB von G . Entfernen wir e_i aus T , so zerfällt T in zwei nicht zusammenhängende Teilbäume T_1 und T_2 . Da e_i auf einem Kreis $C_1 = e_1, \dots, e_k$ in G liegt, können wir wie zuvor e_i durch eine Kante e_j des Kreises C_1 ersetzen, die T_1 und T_2 verbindet. Dadurch erhalten wir einen von T verschiedenen Spannbaum \tilde{T} , der e_i nicht enthält. Da nach Voraussetzung $w(e_j) \leq w(e_i)$ gilt, folgt $w(\tilde{T}) \leq w(T)$ (und sogar $w(\tilde{T}) = w(T)$, da T nach Annahme ein MSB ist). Also ist \tilde{T} ein MSB von G , der e_i nicht enthält, im Widerspruch zur Annahme, e_i liege in *jedem* MSB von G .



Literatur



Robert E. Tarjan:

Data Structures and Network Algorithms

SIAM CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied
Mathematics Bd. 44 (1983)

3.2 Generischer minimaler Spannbaum-Algorithmus

Initialisiere Wald F von Bäumen, jeder Baum ist ein singulärer Knoten

(jedes $v \in V$ bildet einen Baum)

while Wald F mehr als einen Baum enthält **do**

 wähle einen Baum $T \in F$ aus

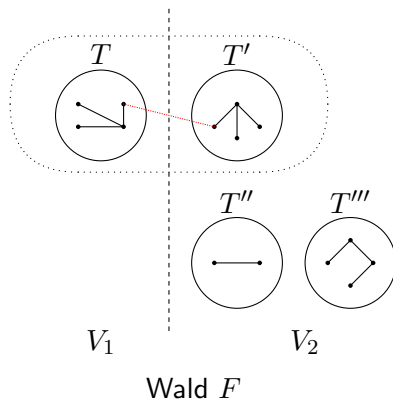
 bestimme eine leichteste Kante $e = \{v, w\}$ **aus T heraus**

 sei $v \in T, w \in T'$

 vereinige T und T' , füge e zum minimalen Spannbaum hinzu

od

Generischer MST-Algorithmus



3.3 Kruskal's Algorithmus

algorithm Kruskal $(G, w) :=$

sortiere die Kanten nach aufsteigendem Gewicht in eine Liste L

initialisiere Wald $F = \{T_i, i = 1, \dots, n\}$, mit $T_i = \{v_i\}$

MSB:= \emptyset

for $i := 1$ **to** $\text{length}(L)$ **do**

$\{v, w\} := L_i$

$x :=$ Baum $\in F$, der v enthält; **co** $x := \text{Find}(v)$ **oc**

$y :=$ Baum $\in F$, der w enthält; **co** $y := \text{Find}(w)$ **oc**

if $x \neq y$ **then**

MSB:=MSB $\cup \{\{v, w\}\}$

$\text{Union}(x, y)$ **co** gewichtete Vereinigung **oc**

fi

od

Korrektheit: Falls die Gewichte eindeutig sind ($w(\cdot)$ injektiv), folgt die Korrektheit direkt mit Hilfe der “blauen“ und “roten“ Regel.

Ansonsten Induktion über die Anzahl $|V|$ der Knoten:

Ind. Anfang: $|V|$ klein: \checkmark

Sei $r \in \mathbb{R}$, $E_r := \{e \in E; w(e) < r\}$.

Es genügt zu zeigen:

Sei T_1, \dots, T_k ein minimaler Spannwald für $G_r := \{V, E_r\}$ (d.h., wir betrachten nur Kanten mit Gewicht $< r$). Sei weiter T ein MSB von G , dann gilt die

Hilfsbehauptung: Die Knotenmenge eines jeden T_i induziert in T einen zusammenhängenden Teilbaum, dessen Kanten alle Gewicht $< r$ haben.

Beweis der Hilfsbehauptung:

Sei $T_i =: (V_i, E_i)$. Wir müssen zeigen, dass V_i in T einen zusammenhängenden Teilbaum induziert. Seien $u, v \in V_i$ zwei Knoten, die in T_i durch eine Kante e verbunden sind. Falls der Pfad in T zwischen u und v auch Knoten $\notin V_i$ enthält (also der von V_i induzierte Teilgraph von T nicht zusammenhängend ist), dann enthält der in T durch Hinzufügen der Kante e entstehende Fundamentalkreis notwendigerweise auch Kanten aus $E \setminus E_r$ und ist damit gemäß der "roten" Regel nicht minimal! Da T_i zusammenhängend ist, folgt damit, dass je zwei Knoten aus V_i in T immer durch einen Pfad verbunden sind, der nur Kanten aus E_r enthält.

Zeitkomplexität: (mit $n = |V|, m = |E|$)

Sortieren	$m \log m = \mathcal{O}(m \log n)$
$\mathcal{O}(m)$ Find-Operationen	$\mathcal{O}(m)$
$n - 1$ Unions	$\mathcal{O}(n \log n)$

Satz 103

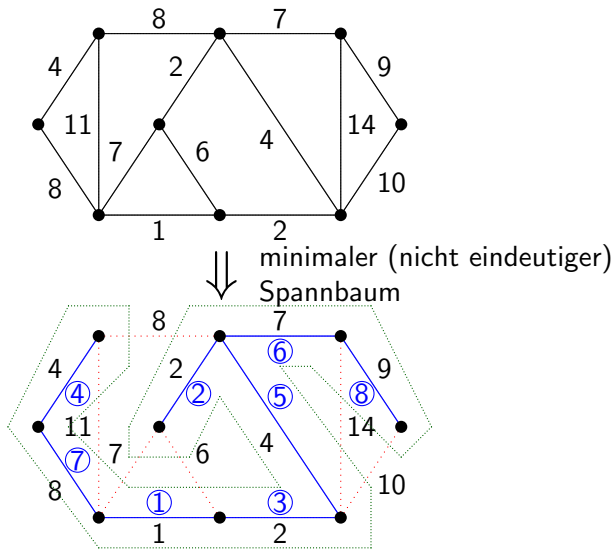
Kruskal's MSB-Algorithmus hat die Zeitkomplexität $\mathcal{O}((m + n) \log n)$.

Beweis:

s.o.



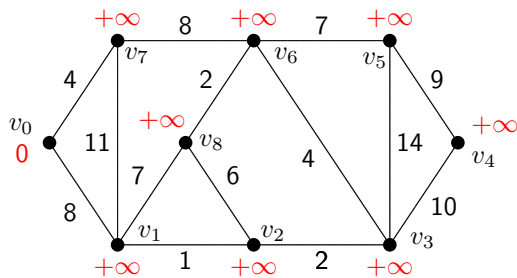
Beispiel 104 (Kruskals Algorithmus)



3.4 Prim's Algorithmus

```
algorithm PRIM-MSB ( $G, w$ ) :=  
  initialisiere Priority Queue PQ mit Knotenmenge  $V$  und  
    Schlüssel  $+\infty, \forall v \in V$   
  wähle Knoten  $r$  als Wurzel (beliebig)  
  Schlüssel  $k[r] := 0$   
  Vorgänger[ $r$ ] := nil  
  while  $PQ \neq \emptyset$  do  
     $u := \text{ExtractMin}(PQ)$   
    for alle Knoten  $v$ , die in  $G$  zu  $u$  benachbart sind do  
      if  $v \in PQ$  and  $w(\{u, v\}) < k[v]$  then  
        Vorgänger[ $v$ ] :=  $u$   
         $k[v] := w(\{u, v\})$   
      fi  
    od  
  od
```

Beispiel 105 (Prim's Algorithmus)



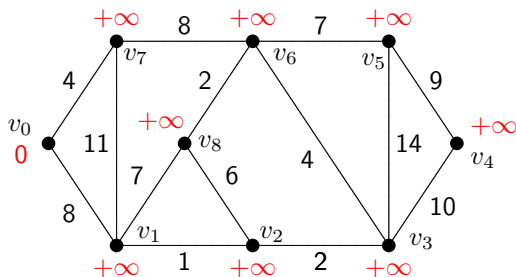
Ausgangszustand:

alle Schlüssel = $+\infty$

aktueller Knoten u : \odot

Startknoten: $r (= v_0)$

Beispiel 105 (Prim's Algorithmus)

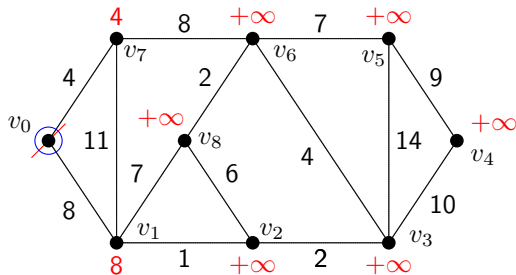


Ausgangszustand:

alle Schlüssel = $+\infty$

aktueller Knoten u : \odot

Startknoten: $r (= v_0)$



suche $u := \text{FindMin}(PQ)$

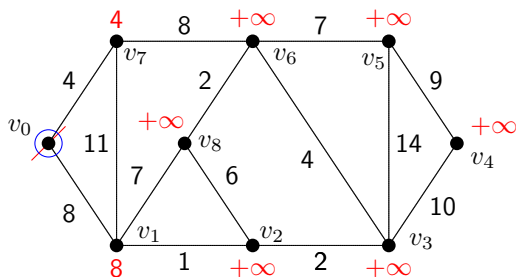
und entferne u aus PQ

setze Schlüssel der Nachbarn in PQ mit

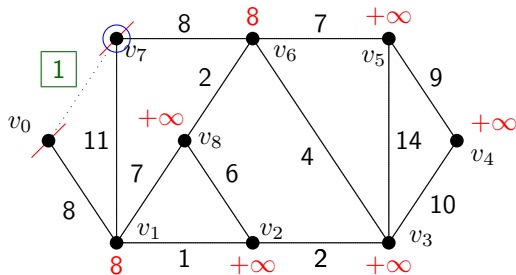
$w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:

($v_1 = 8, v_7 = 4$)

Beispiel 105 (Prim's Algorithmus)

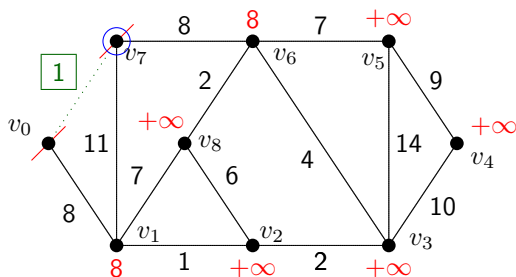


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nachbarn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_1 = 8, v_7 = 4$)

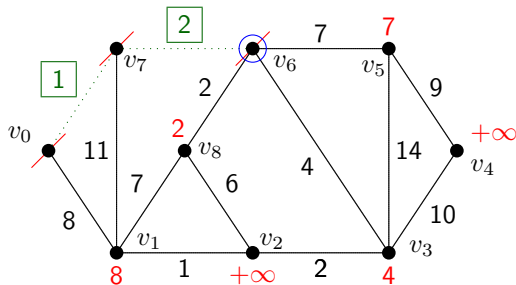


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nachbarn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_6 = 8$)

Beispiel 105 (Prim's Algorithmus)

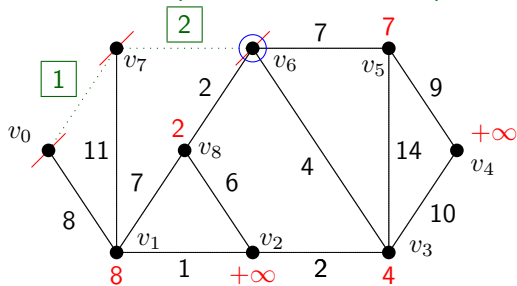


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nach-
 barn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_6 = 8$)

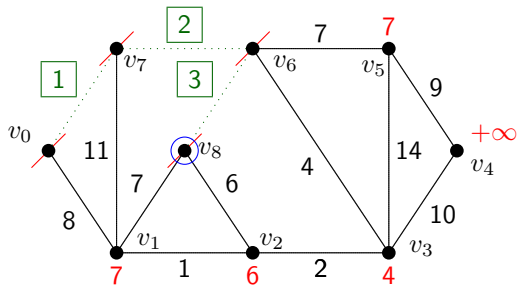


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nach-
 barn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_3 = 4, v_5 = 7, v_8 = 2$)

Beispiel 105 (Prim's Algorithmus)

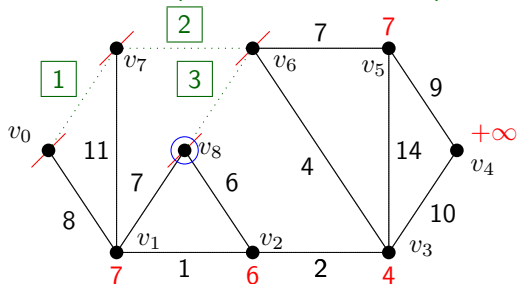


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nachbarn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_3 = 4, v_5 = 7, v_8 = 2$)

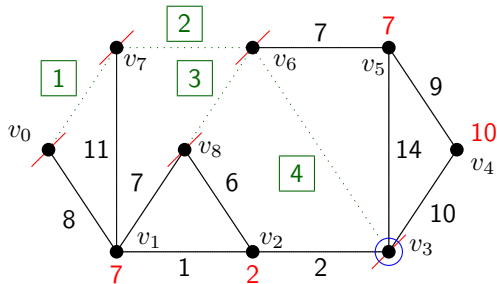


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nachbarn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_1 = 7, v_2 = 6$)

Beispiel 105 (Prim's Algorithmus)

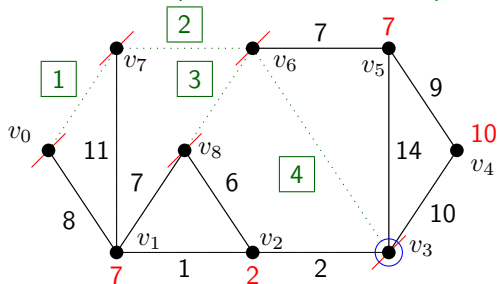


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nachbarn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_1 = 7, v_2 = 6$)

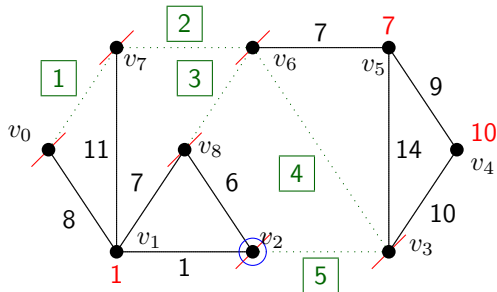


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nachbarn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_2 = 2, v_4 = 10$)

Beispiel 105 (Prim's Algorithmus)

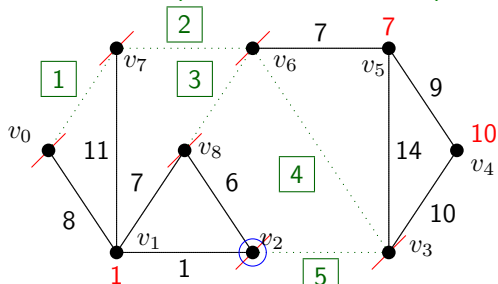


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nach-
 barn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_2 = 2, v_4 = 10$)

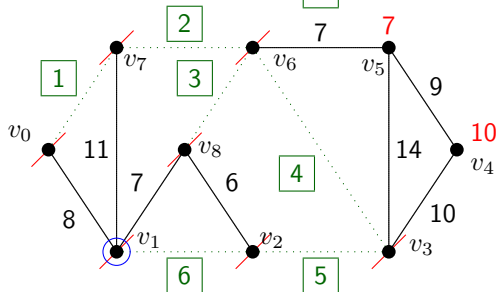


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nach-
 barn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_1 = 1$)

Beispiel 105 (Prim's Algorithmus)

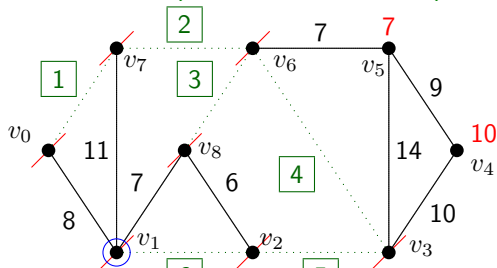


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nach-
 barn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_1 = 1$)

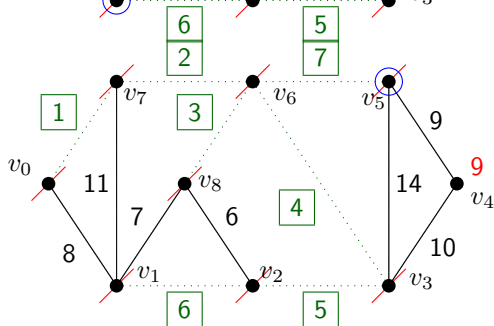


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nach-
 barn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 solche Nachbarn existieren
 nicht

Beispiel 105 (Prim's Algorithmus)

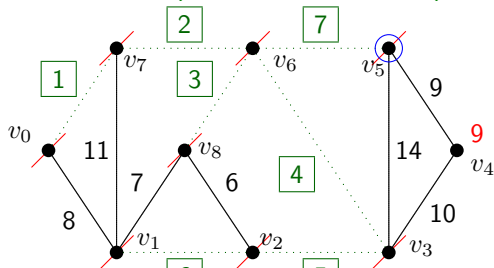


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nachbarn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 solche Nachbarn existieren
 nicht

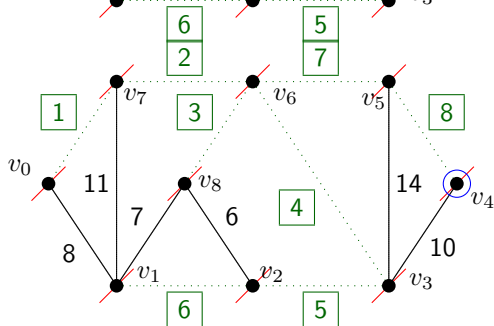


suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nachbarn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 $(v_4 = 9)$

Beispiel 105 (Prim's Algorithmus)



suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ
 setze Schlüssel der Nachbarn in PQ mit
 $w(\{u, v\}) < \text{Schlüssel}[v]$:
 ($v_4 = 9$)



Endzustand:

suche $u := \text{FindMin}(PQ)$
 und entferne u aus PQ ,
 damit ist PQ leer und der
 Algorithmus beendet

Korrektheit: ist klar.

Zeitkomplexität:

- n *ExtractMin*
- $\mathcal{O}(m)$ sonstige Operationen inklusive *DecreaseKey*

Implementierung der Priority Queue mittels Fibonacci-Heaps:

Initialisierung	$\mathcal{O}(n)$
<i>ExtractMins</i>	$\mathcal{O}(n \log n)$ ($\leq n$ Stück)
<i>DecreaseKeys</i>	$\mathcal{O}(m)$ ($\leq m$ Stück)
Sonstiger Overhead	$\mathcal{O}(m)$

Satz 106

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph (zusammenhängend, einfach) mit Kantengewichten w . Prim's Algorithmus berechnet, wenn mit Fibonacci-Heaps implementiert, einen minimalen Spannbaum von (G, w) in Zeit $\mathcal{O}(m + n \log n)$ (wobei $n = |V|$, $m = |E|$). Dies ist für $m = \Omega(n \log n)$ asymptotisch optimal.

Beweis:

s.o.

