Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Tobias Lieber

Wintersemester 2010/11
Übungsblatt 4
16. November 2010

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabetermin: 23. November 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde die durchschnittliche Anzahl der Sondierungen bei erfolgreicher Suche mit Double Hashing mit

$$\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$$

angegeben, wobei wir voraussetzen, dass jede Hashposition gleich wahrscheinlich ist und auf jeden Schlüssel mit gleicher Wahrscheinlichkeit zugegriffen wird.

Beweisen Sie, dass dies eine obere Schranke ist.
Sie dürfen dabei verwenden, dass die Anzahl der erwarteten Sondierungsschritte bei erfolgloser Suche $\frac{1}{1-\alpha}$ ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Beim *Robin Hood Hashing* wird versucht, die für eine erfolgreiche Suche maximal benötigten Vergleiche möglichst gering zu halten. Bei einer Kollision zweier Elemente wird nun nicht mehr automatisch das zuletzt eingefügte Element weiter bewegt, sondern das Element, das bisher weniger Sondierungsschritte benötigt hat.

Beispiel: Ein Element k_1 wurde im j_1-ten Sondierungsschritt an Position $h(j_1, k_1)$ gespeichert. Kollidiert nun ein Element k_2 im j_2-ten Sondierungsschritt mit k_1, d.h., es gilt $h(j_1, k_1) = h(j_2, k_2)$, dann gehen wir wie folgt vor. Gilt $j_1 < j_2$, dann wird k_2 an Position $h(j_2, k_2)$ gespeichert und für k_1 eine neue Position gesucht (entsprechend seiner Sondierungsfolge). Anderenfalls lässt man k_1 gespeichert und sucht für k_2 weiter.

Fügen Sie die Schlüssel $10, 22, 31, 4, 15, 65, 28, 39, 50$ in eine Hashtabelle der Länge $n = 11$ ein, wobei Sie eine Kollision durch die Robin Hood Strategie auflösen. Die Sondierungsfolge sei gegeben durch $h(j,k) = (h_1(k) - jh_2(k)) \bmod n$, wobei $h_1(k) = k \bmod n$ und $h_2(k) = 1 + (k \bmod (n-1))$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Fügen Sie die Elemente $[5, 28, 19, 15, 20, 33, 12, 17, 10]$ in eine Hashtabelle der Größe 9 ein. Lösen Sie Kollisionen dabei mit Verkettung (engl. chaining) auf. Die Hashfunktion ist gegeben als $h(x) = x \bmod 9$.

b) Wir betrachten eine Hashfunktion $h : U \to \{0, \ldots, n-1\}$, die eine Menge von m unterschiedlichen Werten zufällig gleichverteilt in eine Tabelle der Größe n abbildet. Wie groß ist die erwartete Anzahl von Kollisionen, d.h. was ist die erwartete Kardinalität der Menge $\{(x,y) \mid h(x) = h(y), x \neq y\}$?

c) Wir betrachten wiederum Hashing mit Verketten (engl. chaining) von Elementen aus einem Universum U. Beweisen Sie: Wenn $|U| \geq nm$, dann gibt es immer eine Teilmenge von U der Größe m, deren Elemente alle auf den gleichen Hashwert abgebildet werden.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Werte {Apfel, Banane, Kirsche, Himbeere, Melone} sollen in einer Hashtabelle der Größe $n = 4$ untergebracht werden. Es seien folgende Hashfunktionen gegeben:

f_1:	Apfel $\mapsto 4$	Banane $\mapsto 2$	Kirsche $\mapsto 2$	Himbeere $\mapsto 1$	Melone $\mapsto 4$
f_2:	Apfel $\mapsto 3$	Banane $\mapsto 4$	Kirsche $\mapsto 2$	Himbeere $\mapsto 3$	Melone $\mapsto 4$
f_3:	Apfel $\mapsto 2$	Banane $\mapsto 2$	Kirsche $\mapsto 4$	Himbeere $\mapsto 1$	Melone $\mapsto 1$
f_4:	Apfel $\mapsto 1$	Banane $\mapsto 3$	Kirsche $\mapsto 3$	Himbeere $\mapsto 4$	Melone $\mapsto 4$
g_1:	Apfel $\mapsto 1$	Banane $\mapsto 1$	Kirsche $\mapsto 3$	Himbeere $\mapsto 2$	Melone $\mapsto 3$
g_2:	Apfel $\mapsto 2$	Banane $\mapsto 4$	Kirsche $\mapsto 2$	Himbeere $\mapsto 3$	Melone $\mapsto 4$
g_3:	Apfel $\mapsto 4$	Banane $\mapsto 4$	Kirsche $\mapsto 1$	Himbeere $\mapsto 4$	Melone $\mapsto 2$
g_4:	Apfel $\mapsto 3$	Banane $\mapsto 1$	Kirsche $\mapsto 2$	Himbeere $\mapsto 3$	Melone $\mapsto 3$
g_5:	Apfel $\mapsto 4$	Banane $\mapsto 2$	Kirsche $\mapsto 2$	Himbeere $\mapsto 2$	Melone $\mapsto 3$

In der Vorlesung haben wir den Begriff der (c, k)-universellen Hashfunktionen kennengelernt.

(a) Geben Sie für die Familie $\mathcal{H}_1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ das kleinste c an, so dass $\mathcal{H}_1$ $(c, 1)$-universell ist.

(b) Finden Sie eine möglichst kleine Familie $\mathcal{H}_2 \subseteq \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$, die (1,1)-universell ist.

Begründen Sie Ihre Aussagen.