

5. Gruppen

5.1 Grundlagen

Definition 73

Eine **Gruppe** ist eine Algebra $\langle S, \circ, 1 \rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

- Der Operator \circ ist assoziativ.
- 1 ist Einselement $\in S$.
- Für jedes $b \in S$ existiert $b^{-1} \in S$ mit

$$b \circ b^{-1} = 1 = b^{-1} \circ b$$

(Existenz des Inversen).

Beachte: Das Zeichen „1“ wird hier in zwei (i.a.) verschiedenen Bedeutungen gebraucht, nämlich als Zeichen für das Einselement $\in S$ und (im Exponenten „-1“) als Zeichen für die natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$.

Beispiel 74

$\langle \mathbb{Z}_n, +_{(n)}, 0 \rangle$ ist **nicht** Untergruppe von $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, da $+_{(n)}$ nicht die Restriktion (Einschränkung) von $+$ auf \mathbb{Z}_n ist. Beide sind aber Gruppen.

Beispiel 75

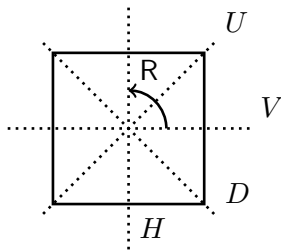
$\langle \mathbb{R}, \cdot, 1 \rangle$ oder $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ sind keine Gruppen! Zu dem Element $0 \in \mathbb{Q}$ gibt es kein inverses Element.

$\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1 \rangle$ bzw. $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1 \rangle$ sind Gruppen.

Beispiel 76

Automorphismengruppe des Quadrats

○ ist die **Komposition** von Abbildungen

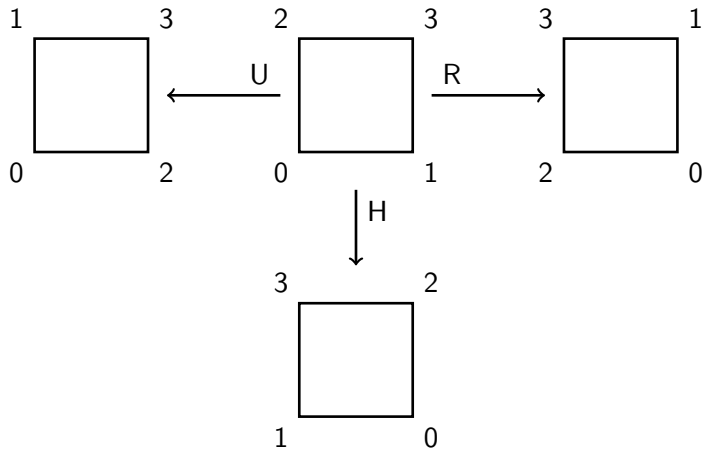


I identische Abbildung,

R Rotation um 90° gegen den Uhrzeigersinn

H horizontale Spiegelung, V vertikale Spiegelung,

D Spiegelung an der fallenden Diagonale, U Spiegelung an der steigenden.



Die Abbildungen $I, R, R^2, R^3, H, V, D, U$ bilden die Automorphismengruppe des Quadrats.

Verknüpfungstafel:

\circ	I	R	R^2	R^3	H	V	D	U
I	I	R	R^2	R^3	H	V	D	U
R	R	R^2	R^3	I	D	U	V	H
R^2	R^2	R^3	I	R	V	H	U	D
R^3	R^3	I	R	R^2	U	D	H	V
H	H	U	V	D	I	R^2	R^3	R
V	V	D	H	U	R^2	I	R	R^3
D	D	H	U	V	R	R^3	I	R^2
U	U	V	D	H	R^3	R	R^2	I

Satz 77

Sei $\langle S, \circ, 1 \rangle$ eine Gruppe. Dann gilt:

- für alle $a \in S$: $a = (a^{-1})^{-1}$ (*Involutionsgesetz*)
- für alle $a, a', b \in S$ (*Kürzungsregel*):

$$a \circ b = a' \circ b \Rightarrow a = a'$$

$$b \circ a = b \circ a' \Rightarrow a = a'$$

- für alle $a, x, b \in S$ (*eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungen*):

$$a \circ x = b \iff x = a^{-1} \circ b$$

$$x \circ a = b \iff x = b \circ a^{-1}$$

- für alle $a, b, c \in S$ (*Injektivität der Operation \circ*):

$$a \neq b \iff a \circ c \neq b \circ c \iff c \circ a \neq c \circ b$$

- für alle $a, b \in S$ (*Surjektivität der Operation \circ*):

$$(\exists x)(a \circ x = b) \text{ und } (\exists y)(y \circ a = b)$$

Beweis:

Wir beweisen lediglich: $a \circ c = b \circ c \iff a = b$. Rest: Übung

\Leftarrow : Dass

$$a = b \Rightarrow a \circ c = b \circ c$$

gilt, ist offensichtlich.

\Rightarrow : Sei $a \circ c = b \circ c$.

$$\begin{aligned} b &= b \circ (c \circ c^{-1}) = (b \circ c) \circ c^{-1} \stackrel{\text{n.V.}}{=} (a \circ c) \circ c^{-1} \\ &= a \circ (c \circ c^{-1}) = a \end{aligned}$$



5.2 Potenzen

Definition 78

Sei $\langle S, \circ, 1 \rangle$ eine Gruppe, $a \in S$. Man definiert:

- 1 $a^0 := 1$
- 2 $a^n := a \circ a^{n-1} = a^{n-1} \circ a \quad \forall n \geq 1$
- 3 $a^{-n} := (a^{-1})^n$

Satz 79

Sei $\langle S, \circ, 1 \rangle$ eine Gruppe. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, $a \in S$:

- 1 $a^m \circ a^n = a^{m+n}$
- 2 $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$
- 3 $a^m = a^n \iff a^{m-n} = 1$

Beweis:

Übung!



5.3 Ordnung eines Gruppenelements

Definition 80

Sei $G = \langle S, \circ, 1 \rangle$ eine Gruppe mit dem Einselement 1. Sei $a \in G$ (genauer: $a \in S$) ein Gruppenelement, $a \neq 1$. Dann ist die **Ordnung** $\text{ord}(a)$ von a das minimale $r \in \mathbb{N}$, so dass

$$a^r = 1.$$

Falls kein solches r existiert, dann ist $\text{ord}(a) := \infty$. Falls gewünscht, kann man auch $\text{ord}(1) := 1$ definieren.

Beispiel 81

$\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$: $\text{ord}(1) = \infty$.

Satz 82

Sei G eine endliche Gruppe; dann hat auch jedes Element in G endliche Ordnung.

Beweis:

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \ni i \mapsto a^i \quad a \in G \text{ beliebig } \neq 1$$

Also gibt es (**pigeon hole principle**) minimale k und j , $0 \leq j \leq k - 1$, so dass

$$a^j = a^k.$$

Daraus folgt:

$$a^{k-j} = a^0 = 1.$$

Da k minimal gewählt wurde, folgt $j = 0$ und $\text{ord}(a) = k$. □

Beispiel 83

Betrachte $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12}, 0 \rangle$:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\text{ord}(a)$	-	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

5.4 Untergruppen

Definition 84

Eine Unteralgebra $\langle T, \circ, 1 \rangle$ einer Gruppe $G = \langle S, \circ, 1 \rangle$ heißt **Untergruppe** von G , falls $\langle T, \circ, 1 \rangle$ eine Gruppe ist.

Bemerkung: Nicht jede Unteralgebra einer Gruppe ist eine Untergruppe!

Beispiel 85

$\langle \mathbb{N}_0, +, 0 \rangle$ ist Unteralgebra von $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, aber keine Gruppe, da es im allgemeinen keine inversen Elemente gibt.

Satz 86

Eine Unteralgebra (bzgl. \circ) einer Gruppe ist eine Untergruppe, falls sie unter der Inversenbildung $^{-1}$ abgeschlossen ist.

Beweis:

Folgt sofort aus der Definition. □

Satz 87

Jede Unteralgebra (bzgl. \circ) einer **endlichen** Gruppe ist eine Untergruppe.

Beweis:

Sei $\langle T, \circ, 1 \rangle$ eine Unteralgebra einer endlichen Gruppe $\langle S, \circ, 1 \rangle$. Sei $b \in T$, $b \neq 1$. Dann gilt:

$$\text{ord}(b) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Sei $m := \text{ord}(b)$. Dann gilt:

$$1 = b^m = b^{m-1} \circ b = b \circ b^{m-1}$$

d. h. $b^{m-1} \in T$ ist das Inverse zu b . □

Satz 88

- Sei $G = \langle S, \circ, 1 \rangle$, $b \in G$ und sei

$$S_b := \{b^m; m \in \mathbb{Z}\} \subseteq S$$

die von b erzeugte Untergruppe von G . S_b ist die kleinste Untergruppe, die b enthält.

- Das Bild einer Gruppe (Halbgruppe, Monoid) unter einem Homomorphismus ist wieder eine Gruppe (Halbgruppe, Monoid).
- Seien $G_1 = \langle S_1, \circ, 1 \rangle$ und $G_2 = \langle S_2, \circ, 1 \rangle$ Untergruppen von $G = \langle S, \circ, 1 \rangle$. Dann ist auch

$$G_1 \cap G_2 = \langle S_1 \cap S_2, \circ, 1 \rangle$$

eine Untergruppe von G .

Beweis:

Trivial, lediglich zur letzten Behauptung:

$$a \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow a^{-1} \in S_1 \wedge a^{-1} \in S_2 \Rightarrow a^{-1} \in S_1 \cap S_2.$$



5.5 Nebenklassen und Normalteiler

Definition 89

Sei $H = \langle T, \circ, 1 \rangle$ eine Untergruppe von $G = \langle S, \circ, 1 \rangle$ und sei $b \in G$. Dann heißt

$$T \circ b := \{c \circ b; c \in T\} =: H \circ b$$

eine **rechte Nebenklasse** von H in G und

$$b \circ T := \{b \circ c; c \in T\} =: b \circ H$$

eine **linke Nebenklasse** von H in G (**engl.: coset**).

Die Anzahl verschiedener Nebenklassen von H in G heißt der **Index** von H in G :

$$\text{ind}(H) = \text{ind}_G(H).$$

H heißt **Normalteiler** von G , falls

$$H \circ b = b \circ H \quad \forall b \in G$$

d. h. H ist Normalteiler genau dann, wenn $\forall b \in G : H = b \circ H \circ b^{-1}$ („**konjugiert**“).

Beispiel 90

Betrachte $\langle \mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12}, 1 \rangle = \langle \{1, 5, 7, 11\}, \cdot_{12}, 1 \rangle$. Dann gilt: Die Untergruppe $\langle \{1, 5\}, \cdot_{12}, 1 \rangle$ ist Normalteiler (folgt aus Definition).

Satz 91

Sei H Untergruppe von G , $b \in G$. Dann ist die Kardinalität von $H \circ b$ gleich der Kardinalität von H (ebenso für $b \circ H$).

Beweis:

Folgt aus der Kürzungsregel: Betrachte die Abbildung

$$H \ni h \mapsto h \circ b \in H \circ b.$$

Diese Abbildung ist surjektiv und injektiv (Kürzungsregel!):

$$h_1 \circ b = h_2 \circ b \Rightarrow h_1 = h_2$$



Satz 92

Sei H Untergruppe von G . Dann bildet die Menge der rechten (linken) Nebenklassen von H eine *Partition* (Zerlegung einer Menge in disjunkte Teilmengen) von G .

Beweis:

Klar ist, dass

$$G \subseteq \bigcup_{b \in G} H \circ b$$

Seien $b, c \in G$ mit $H \circ b \cap H \circ c \neq \emptyset$, etwa $h_1 \circ b = h_2 \circ c$. Dann ist

$$H \circ c = H \circ h_2^{-1} \circ h_1 \circ b = H \circ b$$



Eigenschaften von Nebenklassen:

H sei Untergruppe von G , $b, c \in G$.

- Zwei Nebenklassen $H \circ b$ und $H \circ c$ sind entweder identisch oder disjunkt.
- Für alle $b \in G$ gilt $|H \circ b| = |H|$.

Satz 93 (Lagrange)

Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe in G . Dann

- 1 haben alle Nebenklassen von H in G gleich viele Elemente;
- 2 ist $|G| = \text{ind}_G(H) \cdot |H|$;
- 3 teilt $|H|$ die Kardinalität $|G|$ von G ganzzahlig.

Beweis:

- 1 siehe oben;
- 2 folgt aus Satz 92;
- 3 folgt aus 2.



Mehr zu [Joseph-Louis Lagrange!](#)