6. Boolesche Algebren

6.1 Definitionen

Eine Boolesche Algebra ist eine Algebra

$$\langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1 \rangle,$$

$\oplus, \otimes$ sind binäre, $\sim$ ist ein unärer Operator, 0 und 1 sind Konstanten. Es gilt:

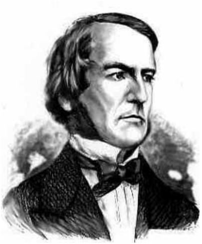
1. $\oplus$ und $\otimes$ sind assoziativ und kommutativ.
2. 0 ist Einselement für $\oplus$, 1 ist Einselement für $\otimes$.
3. für $\sim$ gilt:
$$\begin{array}{rcl} b \oplus \sim b &=& 1 \\ b \otimes \sim b &=& 0 \quad \forall b \in S. \end{array}$$
4. Distributivgesetz:
$$\begin{array}{c} b \otimes (c \oplus d) = (b \otimes c) \oplus (b \otimes d) \\ b \oplus (c \otimes d) = (b \oplus c) \otimes (b \oplus d) \end{array}$$

Bemerkung:
Eine boolesche Algebra ist keine Gruppe, weder bezüglich $\oplus$ $(b \oplus \sim b = 1)$ noch bezüglich $\otimes$.

Beispiel 108

- $\langle \mathbb{B}, \vee, \wedge, \neg, F, T \rangle$
- $\langle 2^U, \cup, \cap, ^-, \emptyset, U \rangle$
- $\langle \{1, 2, 3, 6\}, \mathrm{kgV}, \mathrm{ggT}, x \mapsto \frac{6}{x}, 1, 6 \rangle$

George Boole (1815–1864)



George Boole

lived from 1815 to 1864

Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He also worked on differential equations, the calculus of finite differences and general methods in probability.

Satz 109 (Eigenschaften Boolescher Algebren)

1. *Idempotenz:*

$$(\forall b \in S)\Big[b \oplus b = b \quad \wedge \quad b \otimes b = b\Big]$$

2. *Nullelement:*

$$(\forall b \in S)\Big[b \oplus 1 = 1 \quad \wedge \quad b \otimes 0 = 0\Big]$$

3. *Absorption:*

$$(\forall b, c \in S)\Big[b \oplus (b \otimes c) = b \quad \wedge \quad b \otimes (b \oplus c) = b\Big]$$

4. *Kürzungsregel:*

$$(\forall b, c, d \in S)\left[\begin{array}{l}(b \oplus c = b \oplus d) \wedge (\sim b \oplus c = \sim b \oplus d) \Leftrightarrow c = d \\ (b \otimes c = b \otimes d) \wedge (\sim b \otimes c = \sim b \otimes d) \Leftrightarrow c = d\end{array}\right]$$

Satz 109 (Forts.)

5. *eindeutiges Komplement:*

$$(\forall b, c \in S)\Big[b \oplus c = 1 \ \wedge \ b \otimes c = 0 \iff c = \sim b\Big]$$

6. *Involution:*

$$(\forall b \in S)\Big[\sim(\sim b) = b\Big]$$

7. *Konstanten:*

$$\sim 0 = 1 \qquad \sim 1 = 0$$

8. *De-Morgan-Regeln:*

$$(\forall b, c, d \in S)\left[\begin{array}{l} \sim(b \oplus c) = \sim b \otimes \sim c \\ \sim(b \otimes c) = \sim b \oplus \sim c \end{array}\right]$$

Augustus de Morgan (1806–1871)

Wir zeigen zunächst die Teilbehauptung 7:

$$\sim 0 = 1 \qquad \sim 1 = 0$$

Beweis:

Mit $b = 0$ folgt aus den Eigenschaften 2 und 3 Boolescher Algebren sofort

$$\sim 0 = 1\,,$$

und ebenso mit $b = 1$

$$\sim 1 = 0\,,$$

womit wir Behauptung 7 gezeigt haben. $\square$

Folgende Hilfsbehauptung ist sehr nützlich:

$$1 = 1 \oplus (0 \otimes 1) = (1 \oplus 0) \otimes (1 \oplus 1) = 1 \otimes (1 \oplus 1) = 1 \oplus 1\,.$$

Beweis:

[Es werden nur Teile des Satzes bewiesen.]

1. $$b \oplus b = (1 \otimes b) \oplus (1 \otimes b) = (1 \oplus 1) \otimes b = 1 \otimes b = b$$

2. $$b \oplus 1 = b \oplus \big(b \oplus (\sim b)\big) = (b \oplus b) \oplus (\sim b) = b \oplus (\sim b) = 1$$

3. $$b \oplus (b \otimes c) = (b \otimes 1) \oplus (b \otimes c) = b \otimes (1 \oplus c) = b \otimes 1 = b$$

$\square$

Beobachtung:

Die Eigenschaften treten in Paaren auf, die durch Vertauschen von $\oplus$ und $\otimes$ und von 0 und 1 ineinander übergehen. Solche Eigenschaften heißen dual zueinander.

Da die Axiome unter Dualität abgeschlossen sind, folgt:

Das Duale eines Satzes ist wieder ein Satz.

Definition 110

Sei $A = \langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$ eine endliche Boolesche Algebra. Dann definiert man:

$$\begin{aligned} a \le b &\quad\Longleftrightarrow\quad a \otimes b = a \\ a < b &\quad\Longleftrightarrow\quad a \le b \ \wedge\ a \neq b \end{aligned}$$

Satz 111

Durch $\leq$ ist auf A eine partielle Ordnung definiert, d. h. eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation.

Beweis:

(a) Reflexivität: Zu zeigen ist, dass für alle $a \in S$ gilt $a \leq a$, d. h. $a \otimes a = a$ (Idempotenzgesetz bzgl. $\otimes$)

(b) Antisymmetrie: Sei $a \leq b \;\wedge\; b \leq a$. Damit gilt: $a \otimes b = a$ und $b \otimes a = b$ nach Definition. Damit:

$$a = a \otimes b = b \otimes a = b$$

(c) Transitivität: Sei $a \leq b \;\wedge\; b \leq c$, dann gilt: $a \otimes b = a$ und $b \otimes c = b$. Es ist zu zeigen, dass $a \leq c$, d.h. $a \otimes c = a$.

$$a \otimes c = (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) = a \otimes b = a$$

$\square$

6.2 Atome

Definition 112

Ein Element $a \in S$, $a \neq 0$ heißt ein Atom, i. Z. $\text{atom}(a)$, falls

$$(\forall b \in S \setminus \{0\})\Big[b \leq a \;\Rightarrow\; b = a\Big].$$

Satz 113

Es gilt:

1. $\text{atom}(a) \;\Rightarrow\; (\forall b \in S) \quad [a \otimes b = a \;\vee\; a \otimes b = 0]$
2. $\text{atom}(a) \wedge \text{atom}(b) \wedge a \neq b \;\Rightarrow\; a \otimes b = 0$
3. *Falls gilt:* $(\forall a \in S)[\text{atom}(a) \;\Rightarrow\; a \otimes b = 0]$, *dann* $b = 0$.

Beweis:

[Wir zeigen nur die erste Teilbehauptung]

1. Sei a ein Atom. Nach Voraussetzung gilt (mit $a \otimes b$ statt b):

$$a \otimes b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \big(a \otimes b \leq a \;\Rightarrow\; a \otimes b = a\big)$$

Da aber $a \otimes b \leq a$ ist (Übungsaufgabe!), folgt

$$(a \otimes b = 0) \vee (a \otimes b = a).$$

$\square$

Satz 114 (Darstellungssatz)

Jedes Element x einer endlichen Booleschen Algebra $\langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$ lässt sich in eindeutiger Weise als $\oplus$-Summe von Atomen schreiben:

$$x = \bigoplus_{\substack{a \in S \\ \mathrm{atom}(a) \\ a \otimes x \neq 0}} a$$

Beweis:

Es gilt:

$$x \otimes \bigoplus_{\substack{a\in S\\ \mathrm{atom}(a)\\ a\otimes x\neq 0}} a \stackrel{\text{D-G.}}{=} \bigoplus_{\substack{a\in S\\ \mathrm{atom}(a)\\ a\otimes x\neq 0}} (x\otimes a) \stackrel{\text{Satz113}}{=} \bigoplus_{\substack{a\in S\\ \mathrm{atom}(a)\\ a\otimes x\neq 0}} a$$

Setze

$$y := \bigoplus_{\substack{a\in S\\ \mathrm{atom}(a)\\ a\otimes x\neq 0}} a\,.$$

Beweis (Forts.):

Wir haben gezeigt:

$$x \otimes y = y$$

Ebenso gilt:

$$x \otimes (\sim y) = 0 \quad \text{(Übungsaufgabe!)}$$

Zusammen:

$$\begin{aligned} x &= x \otimes \big(y \oplus (\sim y)\big) \\ &\overset{\text{D–G.}}{=} \big(x \otimes y\big) \oplus \big(x \otimes (\sim y)\big) \\ &= y \oplus 0 = y \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Zur Eindeutigkeit: Sei (Widerspruchsannahme)

$$0 \neq x = \bigoplus_{a \in S_1} a = \bigoplus_{a \in S_2} a,$$

wobei $S_1, S_2 \subseteq S$, $S_1 \neq S_2$ zwei verschiedene Teilmengen von Atomen aus S sind. O. B. d. A. gelte $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ — wenn nicht, dann bilde die Schnittmenge mit $\left(\overline{S_1 \cap S_2}\right)$.

Beweis (Forts.):

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
x \quad &= \quad x \otimes x = \Big(\bigoplus_{a\in S_1} a\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{a\in S_2} a\Big) \\
&= \quad \bigoplus_{\substack{a\in S_1\\ a'\in S_2}} \underbrace{a \otimes a'}_{=0} \\
&\overset{\text{Satz113(2)}}{=} \quad \bigoplus_{\substack{a\in S_1\\ a'\in S_2}} 0 = 0,
\end{aligned}
$$

was ein Widerspruch zur Annahme ist. □

Korollar 115

Jede endliche Boolesche Algebra mit n Atomen enthält genau 2^n Elemente.

Korollar 116

Jede endliche Boolesche Algebra $A = \langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$ mit n Atomen ist isomorph zur Potenzmengenalgebra

$$\mathcal{P}_n := \langle 2^{\{1,\ldots,n\}}, \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, \{1, \ldots, n\}\rangle$$

Beweis:

Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Atome von A. Definiere die Abbildung

$$h : S \ni \bigoplus_{i \in I} a_i \mapsto I \in 2^{\{1,\ldots,n\}}$$

Diese Abbildung ist ein Isomorphismus (leicht nachzurechnen). $\square$