

SS 2011

Zentralübung
Diskrete Strukturen
(zur Vorlesung Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/ds/uebung/>

20. September 2011

ZÜ VI

Übersicht:

1. Themen: Arbeitsblatt 3, Rekursionsgleichungen.
 Erzeugende Funktionen
2. Vorbereitung: auf TA's Blatt 6

1. Thema: Arbeitsblatt, Rekursionsgleichungen

1.1 Beispiele von Rekursionen

Lukaszahlen:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

- 1 Man zeigt mit direktem Beweis für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} .$$

- 2 Es gilt $L_0 = 2$ und $L_1 = 1$.

Schreibweise der **Rekursion** nach Vorlesung:

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Die Rekursion kann als **induktive Definition** einer Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ dienen.

Die Rekursionsgleichung hat die folgenden Eigenschaften:

linear: multiplikative Koeffizienten

konstante Koeffizienten: 1,-1,-1

homogen: rechte Seite ist gleich 0

Ordnung 2: bis zum 2ten Indexvorgänger.

Anfangsbedingungen:

$$f_0 = 2, \quad f_1 = 1.$$

Unter der *vollständigen Rekursionsgleichung* versteht man die Rekursionsgleichung zusammen mit den Anfangsbedingungen (siehe Arbeitsblatt 3).

Lösung der vollständigen Rekursionsgleichung:

$$f_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

Dies sind also wieder die Lukaszahlen.

Beispiel

Fibonaccizahlen:

Rekursionsgleichung wie bei Lukaszahlen.

Anfangsbedingungen: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

Lösung:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

1.2 Arbeitsblatt 3: Lösung homogener linearer Rekursionen

Wir gehen aus von der homogenen linearen Rekursionsgleichung der Ordnung d mit konstanten Koeffizienten q_i für eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$

$$f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + \dots + q_d \cdot f_n = 0, \quad \forall n \geq 0. \quad (1)$$

Allgemeine Lösung

Eine Gleichung „allgemein Lösen“ heißt, ein Verfahren anzugeben, mit dem man alle Lösungen darstellen kann.

Die **Darstellungen** enthalten dann in der Regel gewisse **Parameter**.

Zur allgemeinen Lösung der Gleichung (1) stellen wir zunächst das **charakteristische Polynom** $q^R(z)$ auf und bestimmen dessen **Nullstellen**.

$$q^R(z) = z^d + q_1 z^{d-1} + \dots + q_{d-1} z + q_d. \quad (2)$$

Die (i. A. komplexen) Nullstellen von $q^R(z)$ seien α_i mit Vielfachheit d_i für $i = 1, 2, \dots, k$ und $\sum_{i=1}^k d_i = d$.

Die Anzahl verschiedener Nullstellen sei also k .

Berücksichtigt man die Vielfachheit der Nullstellen, so zählt man d **Nullstellen**.

Beispiel Lukaszahlen:

Charakteristisches Polynom: $q^R(z) = z^2 - z - 1$.

Koeffizienten $q_1 = -1$, $q_2 = -1$. Es gilt stets $q_0 = 1$.

$d = 2$.

Nullstellen:

$$\begin{aligned}\alpha_{1/2} &= \frac{-q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - 4q_2}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind verschieden, d.h. die Vielfachheiten sind $d_i = 1$.
Es gilt also $k = d$.

(Forts. Allgemeine Lösung)

Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ ist genau dann eine Lösung der Rekursion (1), wenn es Zahlen $c_{i,j}$ für $i = 1, 2, \dots, k$ und $j = 0, 1, \dots, d_i - 1$ gibt, so dass für alle $n \geq 0$ gilt:

$$f_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n \quad \text{mit} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} p_i(n) &= \sum_{j=0}^{d_i-1} c_{i,j} \cdot n^j & (4) \\ &= c_{i,0} + c_{i,1} \cdot n + \dots + c_{i,d_i-1} \cdot n^{d_i-1}. \end{aligned}$$

Beispiel Lukaszahlen:

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}f_n &= p_1(n) \cdot \alpha_1^n + p_2(n) \cdot \alpha_2^n \\&= (c_{1,0}) \cdot \alpha_1^n + (c_{2,0}) \cdot \alpha_2^n \\&= c_{1,0} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{2,0} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n .\end{aligned}$$

Spezielle Lösung

Für jeden Koeffizientenvektor $(c_{i,j})$ der Länge d erhält man mit Formel (3) eine *spezielle Lösung* der Rekursion (1).

Für beliebig vorgegebene Zahlen a_0, a_1, \dots, a_{d-1} kann man die Parameter $c_{i,j}$ so wählen, dass die folgenden Gleichungen als sogenannte *Anfangsbedingungen* der Rekursionsgleichung erfüllt sind.

$$f_0 = a_0, f_1 = a_1, \dots, f_{d-1} = a_{d-1}. \quad (5)$$

Beispiel Lukaszahlen:

Allgemeine Lösung

$$f_n = p_1(n) \cdot \alpha_1^n + p_2(n) \cdot \alpha_2^n.$$

Spezielle Lösung für Anfangsbedingungen: $f_0 = 2$, $f_1 = 1$.

Gleichungssystem für $n = 0$ und $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2 &= c_{1,0} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_{2,0} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^0, \\ 1 &= c_{1,0} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_{2,0} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1. \end{aligned}$$

Eindeutige Lösung: $c_{1,0} = 1$, $c_{2,0} = 1$.

Bemerkung:

Im Allgemeinen wird das Gleichungssystem mit Methoden der linearen Algebra gelöst.

Erzeugende Funktion einer speziellen Lösung

Die **erzeugende Funktion** $F(z)$ einer speziellen Lösung $(f_n)_{n \geq 0}$ der Rekursion (1) mit den Anfangsbedingungen (5) ist gleich der rationalen Funktion

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (6)$$

mit dem zum charakteristischen Polynom (2) reflektierten Polynom

$$q(z) = 1 + q_1z + q_2z^2 + \dots + q_dz^d \quad (7)$$

und einem Polynom $p(z)$, das sich aus dem Ansatz der *vollständigen Rekursion* ergibt.

Vollständige Rekursion

Die vollständige Rekursionsgleichung beschreibt die Gleichung (1) zusammen mit den Anfangsbedingungen (5) und ist wie folgt definiert.

Seien $f_n = 0$ für alle $n < 0$. Beachten Sie die bekannte Definition der Deltafunktion $\delta_{i,j}$ mit $\delta_{i,i} = 1$ für alle i und $\delta_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$.

Dann lautet die **vollständige Rekursionsgleichung** für alle $n \geq 0$

$$\begin{aligned} f_n + q_1 \cdot f_{n-1} + \dots + q_d \cdot f_{n-d} \\ = e_0 \cdot \delta_{n,0} + e_1 \cdot \delta_{n,1} + \dots + e_{d-1} \cdot \delta_{n,d-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Dabei sind die Parameter e_i mit den Anfangsbedingungen (5) durch die folgenden Gleichungen verknüpft.

$$\begin{aligned} f_0 &= e_0 = a_0, \\ f_1 + q_1 \cdot f_0 &= e_1 = a_1 + q_1 a_0, \\ f_2 + q_1 \cdot f_1 + q_2 \cdot f_0 &= e_2 = a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0, \\ &\vdots \\ f_{d-1} + \dots + q_{d-1} \cdot f_0 &= e_{d-1} = a_{d-1} + \dots + q_{d-1} \cdot a_0. \end{aligned}$$

Das gesuchte Polynom $p(z)$ ist nun gegeben durch

$$p(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots + e_{d-1} z^{d-1}. \quad (9)$$

Damit gilt für die erzeugende Funktion

$$F(z) = \frac{e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots + e_{d-1} z^{d-1}}{1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_d z^d}.$$

Beispiel Lukaszahlen:

Berechnung der erzeugenden Funktion $F(z)$.

$$q(z) = 1 - z - z^2.$$

$$e_0 = 2,$$

$$e_1 = a_1 + q_1 a_0 = 1 - 1 \cdot 2 = -1.$$

Es folgt

$$p(z) = 2 - z.$$

Ergebnis:

$$F(z) = \frac{2-z}{1-z-z^2}$$

mit Reihenentwicklung

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n.$$

1.3 Erzeugende Funktionen

Bemerkungen zur Definition erzeugender Funktionen!!!

2. Vorbereitung TA's Blatt 6

2.1 VA 1

Seien $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Weiter seien $A(z)$ und $B(z)$ entsprechend ihre erzeugenden Funktionen, d.h.

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{bzw.} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Zeigen Sie, dass die nachfolgend angegebenen Folgen $(c_n)_{n \geq 0}$ und ihre erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jeweils die angegebene Beziehung erfüllen.

1 Mit $c_n := a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = A(z) + B(z).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = A(z) + B(z). \end{aligned}$$

Begründung: folgt aus der Definition der Addition im Ring der formalen Potenzreihen.

2 Mit $c_n := a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = \frac{1}{z}(A(z) - a_0).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}. \\ &= \frac{1}{z} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - a_0) = \frac{1}{z} (A(z) - a_0). \end{aligned}$$

Begründung: Operationen im Ring der formalen Potenzreihen.

3 Mit $c_0 := 0$ und $c_n := a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$C(z) = z \cdot A(z).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1} = z \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = z \cdot A(z). \end{aligned}$$

Begründung: Operationen im Ring der formalen Potenzreihen.

4 Mit $c_n := (n + 1) \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = \frac{d}{dz}(z \cdot A(z)).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) a_n z^n \\ &= \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \right) = \frac{d}{dz} \left(z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right). \end{aligned}$$

Begründung: Definition Linearer Operator $\frac{d}{dz}$ im Ring der formalen Potenzreihen.

5 Mit Mit $c_n := n \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = z \cdot \frac{d}{dz} A(z).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n \\ &= z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = z \cdot \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

2.2 VA 2

Gegeben sei die Funktion

$$F(z) = \frac{z^2 + 3z - 5}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6}.$$

Bestimmen Sie die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, zu der $F(z)$ die erzeugende Funktion darstellt.

Lösung:

Um $F(z)$ in eine Reihe entwickeln zu können, zerlegen wir F in Partialbrüche bezüglich der Nullstellen des Nenners

$$q(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6.$$

Man findet sofort $\beta_1 = 1$ als eine Nullstelle.

Nun dividiert man r durch $z - 1$ und erhält

$$\begin{aligned}t(z) &= z^2 - z - 6 = (z - 3)(z + 2), \\q(z) &= (z - 1)(z - 3)(z + 2).\end{aligned}$$

Die Partialbruchentwicklung von F lautet

$$\begin{aligned} & \frac{z^2 + 3z - 5}{(z - 1)(z + 2)(z - 3)} \\ &= \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 2} + \frac{C}{z - 3} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z - 1} + \frac{-7}{15} \cdot \frac{1}{z + 2} + \frac{13}{10} \cdot \frac{1}{z - 3}. \end{aligned}$$

Wir formen zunächst so um, dass die Entwicklung in geometrische Reihen abgelesen werden kann,

$$\frac{z^2+3z-5}{(z-1)(z+2)(z-3)}$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-z} - \frac{7}{30} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} + \frac{13}{30} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{7}{30} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n + \frac{13}{30} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{30} - \frac{7}{30} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{13}{30} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \cdot z^n$$

und erhalten für alle $n \geq 0$

$$a_n = -\frac{1}{30} \left(5 + 7 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 13 \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Preisfrage: Wo liest man die Rekursionsgleichung ab?

2.3 VA 4

Die Gradfolge eines einfachen ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $d(v_i)$.

① Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

i) 2, 1, 0.

ii) 3, 3, 3, 3, 2, 2.

iii) 3, 3, 3, 2, 2, 2.

Lösung:

- i) Nein, denn wenn einer der drei Knoten den Grad 2 hat, dann ist er mit den beiden anderen Knoten verbunden und es kann keinen isolierten Knoten (Grad 0) geben.

Außerdem muss die Summe der Grade gerade sein.

- ii) Ja. Beispielsweise

$$G = ([6], \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}\}) .$$

- iii) Nein, denn die Gradsumme eines Graphen ist immer gerade.

- 2 Beweisen oder widerlegen Sie:
- i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.
 - ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

Lösung:

Isomorphie bedeutet „Gleichheit bis auf Umbezeichnung“.

- i) Für isomorphe Graphen G_1, G_2 gibt es eine bijektive Zuordnung der Knoten beider Graphen und zwar so, dass die Kantenbeziehungen und damit die Knotengrade erhalten bleiben (Umbezeichnung von Knoten).
Somit sind auch die Gradfolgen identisch.

ii) Die Umkehrung des vorigen Satzes gilt **nicht!**

Bemerkung: Wenn diese Umkehrung gelten würde, dann hätte man in dem Vergleich der Gradfolgen ein effizientes Verfahren, die Isomorphie von Graphen zu testen. Dieses Problem ist jedoch, wie man zeigen kann, nicht effizient lösbar.

Wir beweisen unsere Aussage durch Konstruktion eines Gegenbeispiels, indem wir nämlich zwei nicht isomorphe Graphen G_1 und G_2 mit gleicher Gradfolge 3, 2, 2, 1, 1, 1 angeben.

Seien

$$G_1 = ([6], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}\}),$$

$$G_2 = ([6], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}\}).$$

1. G_1 und G_2 besitzen beide die Gradfolge $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$.
2. G_1 und G_2 sind nicht isomorph:

Beweis:

In G_1 hängt an dem einzigen Knoten vom Grad 3 ein einziges Blatt.

In G_2 hängen an dem entsprechenden Knoten 2 Blätter.

2.4 VA 5

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,3}$.

- 1 Geben Sie 2 **Unterteilungen** des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.
- 2 Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph **planar**.

Ein **vollständiger bipartiter Graph** $K_{m,n}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ ist eine bipartiter Graph mit Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2$ und Kantenmenge $E = \{\{a, b\}; a \in V_1, b \in V_2\}$, wobei V_1 und V_2 disjunkt sind mit $m = |V_1|$ und $n = |V_2|$ Elementen.

Da ein $K_{m,n}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sprechen wir gelegentlich auch von „dem“ Graphen $K_{m,n}$.

- 1 Geben Sie 2 Unterteilungen des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.

Lösung:

Unterteilt man einen Graphen $G = (V, E)$, dann **ersetzt** man eine oder mehrere Kanten $e \in E$ durch jeweils einen neuen Pfad.

Die Zwischenknoten und die Kanten des Pfades sind **neu**, d. h., nicht schon in G enthalten.

Die ersetzte Kante **verschwindet**.

Den dabei entstehenden Graphen $G' = (V', E')$ nennt man **Unterteilung von G** . Es gilt dann $e \notin E'$.

Jede Unterteilung G'' von G' ist auch eine Unterteilung von G , wobei G **kein Teilgraph** ist von G' oder G'' .

Sei $e = \{a, b\}$ eine Kante von $(V, E) = K_{3,3}$.

Wir entfernen e aus E und fügen einen neuen Knoten $x \notin V$ zu V und 2 Kanten $\{a, x\}, \{b, x\}$ zu E .

Der erhaltene Graph

$$G' = (V \cup \{x\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{a, x\}, \{b, x\}\})$$

ist eine **Unterteilung von G mit 7 Knoten**.

Es gibt grundsätzlich 2 verschiedene Vorgehensweisen, aus $(V, E) = K_{3,3}$ eine Unterteilung mit **8 Knoten** zu erhalten.

- (i) Man ersetzt eine Kante $e \in E$ durch einen neuen Pfad der Länge 4 (also mit 2 neuen Knoten).
- (ii) Man ersetzt zwei Kanten $e, f \in E$ durch je einen neuen Pfad der Länge 3 (also mit je 1 neuen Knoten).

- ② Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph **planar**.

Lösung:

Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine Kante, dann kann der resultierende Graph R natürlich keine Unterteilung des $K_{3,3}$ mehr enthalten, weil die Anzahl der Kanten dann zu gering ist.

Aber auch eine Unterteilung des K_5 kann nicht mehr in R enthalten sein, weil der K_5 ja **10 Kanten** enthält und jede Unterteilung von K_5 mehr als 10 Kanten enthalten müsste.

R ist also nach dem **Satz von Kuratowski** planar.