Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 7
26. September 2011

Diskrete Strukturen

Hinweis: Blatt 7 ist das letzte DS Übungsblatt in diesem Semester. Eine Abgabe zur Korrektur ist nicht mehr vorgesehen.

Hausaufgabe 1 (3 Punkte)

Wir betrachten die Rekursionsgleichung für Folgen $(f_n)_{n\geq 0}$

$$f_{n+3} - 6f_{n+2} + 12f_{n+1} - 8f_n = 0\,, \quad \forall n \geq 0\,.$$

1. Geben Sie die allgemeine Lösung der Rekursionsgleichung in geschlossener Form für f_n in Abhängigkeit von geeigneten Parametern an.
2. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung, so dass gilt

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und} \quad (f_n)_{n\geq 0} \in \Theta(n2^n)\,.$$

Hausaufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben sei die lineare Rekursion für Folgen $(f_n)_{n\geq 0}$

$$f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n = 0\,, \quad \forall n \geq 0$$

mit variablen Anfangsbedingungen $f_0 = a$, $f_1 = b$, $f_2 = c$.

1. Bestimmen Sie mit Hilfe vollständiger Rekursion die erzeugende Funktion und die allgemeine Lösung der Rekursion in Abhängigkeit von a, b und c.
2. Bestimmen Sie die Werte von a, b und c, für die die Rekursion eine konstante Lösung besitzt, d. h. $f_n = \gamma$ für alle $n \geq 0$ in Abhängigkeit eines fest gewählten $\gamma \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 3 (3 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass jeder (einfache) Graph mit Gradfolge $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$ zusammenhängend ist. Wie viele Kanten besitzt jeder solche Graph?
2. Geben Sie 2 nicht isomorphe (einfache) Graphen an mit Gradfolge $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$. Begründung!
3. Zeigen Sie, dass es keinen bipartiten Graphen mit Gradfolge $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$ gibt.

Hausaufgabe 4 (3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Seien $G = (V, E)$ ein einfacher Graph und $E' \subseteq E$, $V' \subseteq V$ nichtleere Mengen. Dann ist $T = (V', E')$ ein Teilgraph von G.
2. Jeder (zusammenhängende oder unzusammenhängende) einfache Graph, dessen Knotenmenge V und Kantenmenge E die Gleichung $|V| = |E| + 1$ erfüllt, ist planar.
3. Der Baum mit Prüfer-Code $(5, 5, 5)$ besitzt die Gradfolge $(4, 1, 1, 1, 1)$.

Hausaufgabe 5 (3 Punkte)

1. Gegeben sei der Baum $B = ([8], \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{6,3\}, \{7,2\}, \{8,1\}\})$. Bestimmen Sie den Prüfer-Code von B.
2. Geben Sie (zeichnerisch) den Baum an, der durch den Prüfer-Code $(2, 3, 4, 3, 4)$ dargestellt wird.

Hausaufgabe 6 (3 Punkte)

Wir nennen einen einfachen, ungerichteten Graph mit mindestens 4 Knoten „fast-4-regulär“, wenn alle Knoten vom Grad 4 sind außer 4 Knoten, die vom Grad 2 sind.
Wir betrachten im Folgenden einfache bipartite Graphen $G = (A, B, E)$.
Man zeige:

1. Es gibt bis auf Isomorphie einen einzigen fast-4-regulären bipartiten Graph G mit 6 Knoten, und dieser Graph ist planar.
2. Für alle $n \geq 1$ gibt es einen planaren, fast-4-regulären bipartiten Graph $G = (A, B, E)$ mit $|A| = |B| = 2n$.

   Führen Sie den Beweis durch Induktion über n. Der Induktionsschritt von n auf $n + 1$ kann durch Zeichnung klargemacht werden.

Hausaufgabe 7 (2 Punkte)

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Kanten in den folgenden Graphen: K_6, $K_{3,4}$, P_4, C_5, $M_{3,2}$, $T_{3,3}$, Q_8.
2. Zeigen Sie, dass der Petersen-Graph mehr als 10 Spannbäume besitzt?

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

1. Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch? Begründung!
2. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$, für den $|V| > 2$ und für alle $v \in V$ $\deg(v) \neq 2$ gilt, einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet $\deg(v)$ den Grad von v.
   Hinweis: Entfernen Sie die Blätter eines Baumes.
3. Jeder Baum ist bipartit. Beweis!
4. Jeder k-reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis. Beweis!
5. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!

Vorbereitung 2

1. Gegeben seien die Bäume

   $B_1 = ([9], \{\{1,9\}, \{2,9\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{8,3\}, \{6,7\}, \{7,9\}, \{3,9\}\})\,,$
   $B_2 = ([9], \{\{2,1\}, \{1,7\}, \{5,3\}, \{4,1\}, \{7,3\}, \{9,3\}, \{6,4\}, \{8,4\}\})\,.$

   Bestimmen Sie zu B_1 und B_2 jeweils den Prüfer-Code.
2. Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.

   i) $(6,7,7,7,7,7,7,7)\,,$ ii) $(1,1,1,2,1,2,1)\,,$ iii) $(3,4,5,6,7,8,9)\,.$

Vorbereitung 3

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. In jedem nichtleeren planaren Graphen gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.
2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graphen.

Tutoraufgabe 1

Es sei $G = (V, E)$ ein nichtleerer Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. G ist ein Baum.

2. G ist maximal kreisfrei. Das bedeutet, dass G kreisfrei ist und es für jede Kante $e \in \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \setminus E$ im Graph $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis gibt.

3. G ist minimal zusammenhängend. D. h., G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.

Tutoraufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie, u. a. mit Hilfe des Satzes von Kuratowski, die folgenden Aussagen.

1. Es ist möglich, drei Häuser mit Strom, Gas und Wasser zu versorgen, wenn die Leitungen alle ebenerdig verlaufen müssen und sich nicht schneiden dürfen.

2. Wenn man zu einem beliebigen Baum $G = (V, E)$ einen neuen Knoten v hinzufügt und v mit allen Knoten in V verbindet, so ist der entstehende Graph planar.

Tutoraufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein dreiecksfreier Graph, d h. G enthalte keinen K_3 als Teilgraphen.
Sei G planar.

1. Zeigen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel: $|E| < 2|V|$.

   Hinweis : Beachten Sie, dass die Polyederformel zunächst nur auf Komponenten von G anwendbar ist.

2. Beweisen Sie: Falls G unzusammenhängend ist, dann besitzt G zwei Knoten vom Grad höchstens 3.