SS 2011

Zentralübung
Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/uebung/

9. Juni 2011

ZÜ III

Übersicht:

1. Thema: Verteilungen
2. Vorbereitung auf Tutoraufgaben: VA 1+2 von Blatt 6

1. Thema: Verteilungen

Ziel: Den Zusammenhang unter gewissen Verteilungen herstellen.

1.1 Welche Verteilungen betrachten wir?

Diskrete Verteilungen, die eng mit Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen zusammenhängen:

- Binomialverteilung: $f_{X_1}(x) = \binom{z}{x} p^x q^{z-x}.$
- Geometrische Verteilung: $f_{Z_1}(z) = pq^{z-1}.$
- Negativ-Binomial-Verteilung: $f_{Z_2}(z) = \binom{z-1}{x-1} p^x q^{z-x}$
- Poisson-Verteilung: $f_{X_2}(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$

Dabei sind $x, z \in \mathbb{N}_0$. Für alle übrigen Argumente aus $\mathbb{R}$ werden die Dichten gleich 0 gesetzt.

1.2 Das Konzept der Wiederholung bei Zufallsvariablen

In vielen wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen wird eine (unendliche) Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $I_{p,1}$, $I_{p,2}$, ..., $I_{p,n}$, ... „definiert" wie folgt:

„Definition":

Sei I_p eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $\langle\Omega, \Pr\rangle$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ wird durch die unabhängige n-te Wiederholung der Auswertung von I_p eine Zufallsvariable $I_{p,n}$ definiert.

Insgesamt erhält man ein unabhängiges System von unendlich vielen Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung wie I_p

$$I_{p,1}, I_{p,2}, \ \ldots \ , I_{p,n}, \ \ldots \quad .$$

Kritik der „Definition“:

1. Systeme von unabhängigen Zufallsvariablen setzen einen gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum voraus.

   Aber!

   Auf $\langle \Omega, \Pr \rangle$ sind alle $I_{p,i}$ identisch und insbesondere abhängig.

   Dies kann also nicht! der geforderte gemeinsame Wahrscheinlichkeitsraum sein.

2. Man kann sogar nachweisen, dass kein! diskreter gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsraum existiert, der in sinnvoller Weise alle notwendigen Forderungen erfüllt!

Was ist zu tun?

1. Schritt

Wir betrachten die einfache Wiederholung (= 2-fache Ausführung) eines Experiments mit den Ereignissen des Wahrscheinlichkeitsraumes $\langle \Omega, \Pr \rangle$ und der Bewertung der Ereignisse durch I_p

wie folgt:

Bei 2-facher Ausführung des Experiments erhalten wir 2 Ergebnisse ω_1 und ω_2 mit Bewertungen $I_p(\omega_1)$ und $I_p(\omega_2)$.

Dann können wir 2 neue Zufallsvariable $I_{p,1}$ und $I_{p,2}$ definieren als Abbildungen $\Omega \times \Omega \to \{0, 1\}$ mit

$$I_{p,1}((\omega_1, \omega_2)) = I_p(\omega_1) \quad \text{bzw.} \quad I_{p,2}((\omega_1, \omega_2)) = I_p(\omega_2)\,.$$

Die Abbildungen $I_{p,1}$ und $I_{p,2}$ stellen die erste bzw. zweite Wiederholung eines Experiments aus $\langle \Omega, \Pr \rangle$ dar, sind aber nun

Zufallsvariable über dem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum

$$\langle \Omega \times \Omega, \Pr_{2\times} \rangle \quad \text{mit} \quad \Pr_{2\times}[(\omega_1, \omega_2)] = \Pr[\omega_1] \cdot \Pr[\omega_2] \, .$$

$I_{p,1}$ und $I_{p,2}$ sind
unabhängig und gleichverteilt!

2. Schritt

Wir betrachten die ∞-fache Wiederholung eines Experiments mit den Ereignissen des Wahrscheinlichkeitsraumes $\langle \Omega, \Pr \rangle$ und der Bewertung der Ereignisse durch I_p

wie folgt:

Bei ∞-facher Ausführung des Experiments erhalten wir eine Folge von Ergebnissen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ mit Bewertungen $I_p(\omega_1), I_p(\omega_2), \ldots$.

Dann können wir eine unendliche Folge von Zufallsvariablen $I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots$ definieren als Abbildungen $I_{p,i} : \Omega^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}$ mit

$$I_{p,i}((\omega_1, \omega_2, \ldots)) = I_p(\omega_i) \,.$$

Die Abbildungen $I_{p,i}$ stellen die i-te Wiederholung eines Experiments aus $\langle\Omega, \mathrm{Pr}\rangle$ dar und sind aber nun

Abbildungen über dem gemeinsamen Ergebnisraum $\Omega^{\mathbb{N}}$.

Sind $I_{p,i}$ unabhängige und gleichverteilte Zufallsvariable?

Alle Abbildungen der Folge

$$Y = I_{p,1}, I_{p,2},\ \ldots\ ,\ I_{p,n},\ \ldots$$

sind definiert über demselben Raum $\Omega^{\mathbb{N}}$.

Können wir einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum
$W = \langle \Omega^{\mathbb{N}}, \Pr_{\mathbb{N}} \rangle$ definieren, so dass
Y eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen ist **?**

Nein.

Aber!

Es gibt einen Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsraum

$$W = \langle \Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}, \Pr_{\mathbb{N}} \rangle ,$$

so dass Y eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen ist.

Dabei ist

$\mathcal{A}$ diejenige Menge von Ereignissen über $\Omega^{\mathbb{N}}$, denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann.

$\mathcal{A}$ bildet eine sogenannte σ-Algebra von Ereignissen.

Bemerkung:
Die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie handelt von Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsräumen.

Definition eines passenden Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsraumes.

Man definiert für alle $e \in \Omega$ das Ereignis

$$A_{i,e} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}\,;\, \omega_i = e\} \subseteq \Omega^{\mathbb{N}}$$

mit der Bedeutung, dass die i-te Wiederholung des Experiments in $\langle \Omega, \Pr \rangle$ genau $e \in \Omega$ ergibt.

Die Wahrscheinlichkeit von $A_{i,e}$ wird wie folgt definiert.

$$\Pr[A_{i,e}] = \Pr[e]\,.$$

Definition der Ereignisalgebra $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}$ ist die Menge aller Mengen, die durch beliebige abzählbar viele Durchschnitte und Vereinigungen von Mengen $A_{i,e}$ gebildet werden können.

Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\Pr$:

Die Wahrscheinlichkeiten werden durch die Summe der Wahrscheinlichkeit von abzählbar vielen disjunkten Ereignissen gebildet.

Achtung!

- Es gilt nicht mehr die Diskretheitsbedingung,
  dass jede Wahrscheinlichkeit
  als Summe von Wahrscheinlichkeiten von
  Elementarereignissen ausgedrückt werden kann.
- Es gilt nun die Unabhängigkeit des Systems der
  Zufallsvariablen $I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots, I_{p,n}, \ldots$,
  d.h., alle Wiederholungen werden unabhängig voneinander
  ausgeführt.

1.3 Gemeinsame Herleitung der Verteilungen

Sei $Y = I_{p,1}, I_{p,2}, \ \ldots \ , I_{p,z}, \ \ldots \ .$

Sei $A_{x,z}$ das Ereignis über $\Omega^{\mathbb{N}}$, dass in der Folge Y an z-ter Stelle das x-te Mal eine 1 aufgetreten ist.

Dann gilt

$$Pr[A_{x,z}] = \binom{z-1}{x-1} p^x q^{z-x} \,.$$

Bemerkung: Die Ereignisse $A_{x,z}$ sind i.A. nicht disjunkt.

Matrix der binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten $Pr[A_{x,z}]$:

$x =$ \ $z =$	0	1	2	3	4	$\ldots$	k
0	1	q	q^2	q^3	q^4	$\ldots$	
1	0	p	$\binom{1}{0}pq$	$\binom{2}{0}pq^2$	$\binom{3}{0}pq^3$	$\ldots$	
2	0	0	p^2	$\binom{2}{1}p^2q$	$\binom{3}{1}p^2q^2$	$\ldots$	
3	0	0	0	p^3	$\binom{3}{2}p^3q$	$\ldots$	
4	0	0	0	0	p^4	$\ldots$	
$\vdots$						$\vdots$	
i						$\ldots$	$\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}$

Spaltensumme (ohne Zeile 0):

Für alle $k \geq 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \;=\; p\,.$$

Wenn wir X_k definieren als Anzahl der Einsen im Vektor $(I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots, I_{p,k-1})$ unter der Bedingung, dass $I_{p,k} = 1$ gilt, dann ist X_k binomialverteilt.

Zeilensumme (ohne Spalte 0):

Für alle $i \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \;=\; 1\,.$$

Wenn wir Z_i definieren als das minimale k, so dass der Vektor $(I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots, I_{p,k})$ genau i Einsen enthält, dann ist Z_i negativ binomialverteilt.

Für $i = 1$ ergibt sich die geometrische Verteilung und

$$\sum_{k=1}^{\infty} p q^{k-1} \;=\; 1\,.$$

1.4 Einordnung der Poisson Verteilungen

Man kann die Matrix der Binomialverteilungen für verschiedene p betrachten und dabei die Zeile festhalten.
Sei i also eine gegebene Zeilennummer.

Dann gilt die folgende Beobachtung:

Falls man eine Folge von p_k's betrachtet mit $p_k = \frac{p}{k}$, dann findet der folgende Grenzübergang statt.

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k}{i} p_k^i q_k^{k-i} = \frac{e^{-p} p^i}{i!} \,.$$

Entsprechend konvergieren die Zeileneinträge der Matrizes für p_k mit höher werdender Spaltennummer gegen den Wert

$$p_k \cdot \frac{e^{-p} p^{i+1}}{(i+1)!} \,.$$

Insofern steht die Poisson Verteilung in Zusammenhang mit den Matrizes der Binomialverteilung und insbesondere (bekanntlich) mit der Binomialverteilung.

2. Vorbereitung auf Tutoraufgaben

2.1 VA 1 von Blatt 6

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen.

Lösung:

Die Dichte einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen X_n für n-maliges Auftreten des Wertes 1 bei Erfolgswahrscheinlichkeit p ist

$$f_{X_n}(i) = \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n}\,.$$

Man beachte, dass mit $\binom{i-1}{n-1} = \frac{(i-1)^{\underline{n-1}}}{(n-1)!}$ für $i < n$ sofort $\binom{i-1}{n-1} = 0$ folgt.

Für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_{X_n}(s)$ gilt dann

$$\begin{aligned} G_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i \,. \end{aligned}$$

Ein Schlüssel für eine geschlossene Darstellung der Funktion $G_{X_n}(s)$ kann u. a. die Rekursion für alle $n \geq 1$ sein mit

$$G_{X_{n+1}}(s) = \frac{p \cdot s^2}{n} \cdot G'_{X_n}(s)\,,$$

wobei laut Vorlesung für $n = 1$ gilt

$$G_{X_1}(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}\,.$$

Beweis der Rekursion:

$$\begin{aligned}
G'_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot i \cdot s^{i-1} \\
&= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{n} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-n} \cdot s^{i+1} \\
&= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i-1}{n+1-1} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-(n+1)} \cdot s^{i} \\
&= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot G_{X_{n+1}}(s) \,.
\end{aligned}$$

Ein alternativer Ansatz $X_n = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n$ mit unabhängigen geometrisch verteilten Z_i ist nach Vorlesung

$$G_{X_n}(s) = G_{Z_1}(s) \cdot G_{Z_2}(s) \cdot \ldots \cdot G_{Z_n}(s) = \left(\frac{ps}{1-(1-p)s} \right)^n .$$

2.2 VA 2 von Blatt 6

1. Sei $(H_n)_{n\geq 1}$ eine rekurrente Ereignisfolge.

   Die Zufallsvariable Z mit $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ messe für $k \in \mathbb{N}$ die Wartezeit $Z = k$ bis zum Eintreten des ersten Ereignisses H_k der Ereignisfolge.

   Zeigen Sie die Ungleichung

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Pr[Z = k] \leq 1\,.$$

Lösung:

Bemerkung:
Bei oberflächlicher Betrachtung erscheint die Gültigkeit der Ungleichung als eine triviale Folge der Eigenschaft von Z, eine „Zufallsvariable" zu sein, Denn die Summe aller Wahrscheinlichkeiten für die Werte aus W_Z muss ja 1 sein.

Die Tatsache, dass $\Pr[Z = k]$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definiert wurde, heißt aber noch nicht, dass Z bezüglich dieser Definition eine Zufallsvariable ist. Das ist noch nicht bewiesen.
Insbesondere haben wir bisher nur numerische Zufallsvariable mit $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ betrachtet.

Die Aufgabe liefert also erstmals den Nachweis, dass wir über Z von einer Zufallsvariable (im erweiterten Sinn) sprechen dürfen.

Zum Beweis genügt es im Prinzip die paarweise Disjunktheit aller Ereignisse $Z = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ zu beweisen und die entpsrechenden Wahrscheinlichkeiten anzugeben.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$\Pr[H_1] + \Pr[\bar{H}_1] = 1\,.$$

Wegen $\Pr[Z = 1] = \Pr[H_1]$ folgt

$$\sum_{i=1}^{1} \Pr[Z = i] + \Pr[\bar{H}_1] = 1\,.$$

Dies ist der Induktionsanfang zum induktiven Beweis der folgenden Gleichung für alle $n \geq 1$.

Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr[Z = i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n\right] \; = \; 1\,.$$

Den Induktionsschritt von n auf $n+1$ beweist man wie folgt.

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[Z=i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Pr[Z=i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n \cap H_{n+1}\right] \\
&\qquad\qquad + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n \cap \bar{H}_{n+1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Pr[Z=i] + \Pr[Z=n+1] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_{n+1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \Pr[Z=i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_{n+1}\right] .
\end{aligned}
$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

2. Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge unabhängiger Indikatorvariablen mit gleicher Bernoulli-Verteilung.

   Zeigen Sie, dass die Folge $(H_n)_{n \geq 1}$ der Ereignisse $H_n = (X_n = 1)$ rekurrent ist.

Lösung:

Wir zeigen für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i > j$

$$\Pr\left[H_i \,|\bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right] = \Pr[H_{i-j}]\,.$$

Sei p die Erfolgswahrscheinlichkeit für die Variablen X_n.

Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\Pr[H_i] = p$.

Da die X_i unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned}\Pr\left[H_i \,|\bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right] &= \frac{\Pr\left[H_i \cap \bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right]}{\Pr\left[\bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right]} \\ &= \Pr[H_i] \\ &= p \\ &= \Pr[H_{i-j}]\,.\end{aligned}$$