Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 1
3. Mai 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 10. Mai 2011, 10 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Vorbemerkung: Hausaufgaben haben Wiederholungscharakter und stellen grundsätzlich eine Lernkontrolle dar für Stoff der vorausgegangenen Übungsblätter bzw. Arbeitsblätter. Auf dem vorliegenden Übungsblatt 1 beziehen sich die Hausaufgaben auf Stoff der verausgegangenen Semester.
Die Hausaufgaben werden korrigiert und bewertet. Beachten Sie bitte bei der Abgabe sowohl den Abgabetermin als auch die auf der Übungswebseite beschriebenen Regeln.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $a_i \in \mathbb{N}_0$ mit $a_i < 10$.

1. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i) \bmod 9 = (\sum_{i=0}^{n} a_i) \bmod 9$.
2. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i) \bmod 11 = (\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (-1)^i) \bmod 11$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Geben Sie auf der Grundlage der Gleichungen in HA 1 ein effizientes Verfahren an, die Korrektheit der Ergebnisse von arithmetischen Rechnungen mit Addition, Subtraktion und Multiplikation natürlicher Zahlen in Dezimalzahldarstellung mit „ca. 99 prozentiger Sicherheit“ festzustellen. (Elferprobe+Neunerprobe)

Begründen Sie die „Verläßlichkeit“ Ihres Verfahrens.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Eine Box enthalte 1 weißen, 2 schwarze und 4 rote, gleichartige Bälle. Wenn wir mit zwei Ziehungen (ohne Zurücklegen) genau einen weißen und einen schwarzen Ball ziehen, machen Sie den Hauptgewinn.

Wie groß schätzen Sie Ihre Gewinnchance ein? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

1. Listen Sie alle 3-elementigen Multiteilmengen von Ω auf.
2. Wie viele 5-elementigen Multiteilmengen von Ω gibt es?

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

1. Machen Sie sich die begrifflichen Unterschiede klar, wenn wir von „Ereignis“, „Elementarereignis“ oder „Ergebnismenge“ sprechen.
2. Begründen Sie den begrifflichen Zusammenhang zwischen endlichen Multimengen und endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.

Vorbereitung 2

1. „Wenn bei 1000 Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null.“

   Warum ist diese Aussage nicht sinnvoll!

2. Eine Box enthalte schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle. Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

   Wie viele Bälle enthielt die Urne zu Beginn?

   (Wir setzen entsprechende Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit voraus).

Vorbereitung 3

1. Geben Sie ein Beispiel eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes an, in dem Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 existieren.
2. Sei $\langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse A und B gelte $\Pr[A] = 1$ und $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

   Zeigen Sie $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

Vorbereitung 4

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments V das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse) A und B feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von V das Eintreten von Ereignissen X und relativen Häufigkeiten $h(X)$ wie folgt.

$$\begin{aligned} h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}\,, \\ h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}\,, \\ h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten 3 Fehlerarten A, B und C, die bei der Fertigung eines Bauteils auftreten. Wir nehmen an, dass die 3 Fehlerarten gleich häufig vorkommen. Die Ausgangskontrolle protokolliert bei 1000 fehlerhaften Bauteilen folgende Fehler.

5 Bauteile haben gleichzeitig die Fehler A, B und C,
25 Bauteile haben genau die Fehler A und B,
40 Bauteile haben genau die Fehler A und C und
50 Bauteile haben genau die Fehler B und C.

1. Wie viele von den 1000 fehlerhaften Bauteilen haben den Fehler B?

   Beschreiben Sie die Situation zunächst mit einem Venn-Diagramm.

2. Wir nehmen an, dass im Protokoll der Ausgangskontrolle die Zählung wie oben steht, allerdings wegen eines einzigen Tippfehlers die letzte Zeile wie folgt lautet:

   500 Bauteile haben genau die Fehler B und C.

   Wie kann man allein aus den genannten Zahlen heraus nachweisen, dass ein Tippfehler vorliegen muss?

Tutoraufgabe 2

Eine faire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit 1/2 „Kopf" zeigt und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 „Zahl". Wir werfen eine solche Münze n mal, dabei erhalten wir k mal „Kopf" und $n - k$ mal „Zahl".

1. Bestimmen Sie den zu n zugehörigen Ergebnisraum Ω_n.

2. Sei n gerade. Geben Sie eine möglichst gute asymptotische Abschätzung für $Pr[k = n/2]$ an. (Hinweis: Verwenden Sie die *Stirling-Formel*.)

3. Wie groß ist $Pr[\,k \text{ gerade}\,]$ in Abhängigkeit von n?

4. Wie groß ist $Pr[\,\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } (n-i+1)\text{-ter Wurf}\,]$?

Tutoraufgabe 3

Eine unfaire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf" und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ „Zahl" zeigt, wobei $0 \leq p \leq 1$ und $p \neq \frac{1}{2}$ gilt. Wir werfen eine solche Münze n mal und erhalten dabei k mal „Kopf" und $n - k$ mal „Zahl".

1. Beschreiben Sie das Experiment durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $W = \langle \Omega_n, \Pr \rangle$.

2. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass genau k-mal Kopf erscheint.