

---

## Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

---

Abgabetermin: 19. Juli 2011, 12 Uhr in die DWT Briefkästen

### Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien  $X_1$  und  $X_2$  unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$ .

1. Berechnen Sie die Dichtefunktion von  $Y = X_1 + X_2$  durch Anwendung der Faltungsformel

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(y-x) dx$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis im Fall  $\lambda_1 = \lambda_2$  so weit wie möglich.

2. Seien  $X_1, X_2, X_3$  unabhängig exponentialverteilt mit gleichem Parameter  $\lambda$  und  $Y = X_1 + X_2 + X_3$ . Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F_Y$  in geschlossener Form.

### Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert  $\mu$  und einer Standardabweichung  $\sigma_X = 2$ . Wir verwenden  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  als Schätzvariable für  $\mu$ , wobei die  $X_i$  unabhängige Wiederholungen von  $X$  seien. Wir setzen voraus, dass  $\bar{X}$  für  $n \geq 1500$  normalverteilt ist.

1. Leiten Sie eine möglichst kleine untere Schranke  $n_0$  für  $n$  her, so dass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$\Pr[|\bar{X} - \mu| < 0,1] \geq 0,9.$$

Für das 0,95-Quantil der Standardnormalverteilung ist dabei  $z_{0,95} \approx 1,65$  zu verwenden.

2. Nun sei  $n = 2500$ . Geben Sie ein Konfidenzintervall für  $\mu$  zum Konfidenzniveau 0,9 an!

### Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Wenn zwei unabhängig Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  normalverteilt sind, dann ist auch ihre Differenz  $X - Y$  normalverteilt.
2. Jede erwartungstreue Schätzvariable für einen Parameter  $\delta$  schätzt den Erwartungswert von  $\delta$ .

3. Die Anwendung des Maximum-Likelihood-Prinzips setzt die Verfügbarkeit einer Stichprobe voraus.
4. Bei echten Alternativtests ist die Summe der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art und der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art stets gleich 1.
5. Wir betrachten eine erwartungstreue, diskrete Schätzvariable  $X$  für einen Parameter  $\alpha$ . Für die Verteilungsdichte  $f_X$  gelte  $f_X(i) = \frac{3^i e^{-3}}{i!}$  für  $i \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist 3 der durch  $X$  für  $\alpha$  geschätzte Wert.

#### Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien  $\lambda > 0$  und  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängige und identisch verteilte kontinuierliche Zufallsvariable jeweils mit der gleichen Dichte

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda^3 t^2 e^{-\lambda t} & : t \geq 0, \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Sei  $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$  ein Stichprobenvektor. Stellen Sie die Likelihood-Funktion  $L(\vec{k}; \gamma)$  für den Parameter  $\gamma = \frac{1}{\lambda}$  auf.
2. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für  $\gamma$  durch Maximieren von  $L(\vec{k}; \gamma)$ .

---

**Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

---

## Vorbereitung 1

Auf zwei unabhängigen Servern stehe ein Web-Dienst zur Verfügung. Es soll festgestellt werden, welcher Server schnellere Antwortzeiten liefert. Dazu werden  $n = 1000$  Anfragen an die Server geschickt und es wird festgestellt, von welchem Server die Antwort zuerst eintrifft. Dabei gehen wir davon aus, dass Pakete nicht gleichzeitig empfangen werden können. In 540 Fällen antwortet Server  $A$  vor Server  $B$ .

Wir wählen als Nullhypothese  $H_0$  die Aussage, dass Server  $B$  im Mittel schneller ist als Server  $A$ .

Kann man für einen entsprechenden statistischen Test auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0,04$  die Nullhypothese annehmen?

Formulieren Sie hierzu den Test und weisen Sie Ihre Behauptung nach.

## Vorbereitung 2

Seien  $T_1, T_2, \dots$  unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit gleichem Parameter  $\lambda$ . Seien  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Man zeige für alle  $n \in \mathbb{N}$  für die Verteilungsfunktion von  $S_n$ , dass für alle  $t \geq 0$  gilt:

$$F_{S_{n+1}}(t) = -\frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} + F_{S_n}(t).$$

## Tutoraufgabe 1

Sei  $T = X_1 + X_2 + X_3$  eine Zufallsvariable, wobei  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  seien. Wir betrachten  $T$  als Stichprobenvariable zum Test der Hypothese  $H_0 : p \geq \frac{1}{3}$  mit Ablehnungsbereich  $\tilde{K} = \{0, 1, 2\}$ .

1. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F_T$  von  $T$ !
2. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art!
3. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art unter der Annahme, dass  $H_1 : p \leq \frac{1}{4}$  eine echte Alternative zu  $H_0$  sei!

## Tutoraufgabe 2

Ein Hersteller von Nahrungsmittelkonserven gibt die Haltbarkeit eines bestimmten Produkts mit mindestens 50 Monaten an. Sie kaufen 20 derartige Konserven und messen ihre Haltbarkeit. Die Konserven haben im Schnitt 40 Monate gehalten mit einer Stichprobenstandardabweichung von  $S = 30$  Monaten.

1. Zeigen Sie, dass die Angabe des Herstellers nicht abgelehnt werden kann (Signifikanzniveau 0.05).
2. Wie viele Konserven hätten Sie mindestens kaufen müssen, um die Angabe des Herstellers ablehnen zu können?

## Tutoraufgabe 3

Seien  $T_1, T_2, \dots$  unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit gleichem Parameter  $\lambda$ . Beispiel: Aufgabe zu Grenzkontrollen im vorausgegangenen Übungsblatt mit  $\lambda = \frac{1}{30}$ .

Seien  $S_n = \sum_{i=0}^n T_i$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Wir betrachten den Stochastischen Prozess  $(X(t))_{t>0}$ , der gegeben ist durch

$$X(t) := \max\{n \in \mathbb{N}_0; S_n \leq t\}.$$

1. Zeigen Sie, dass für alle  $t > 0$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  die folgende Gleichung gilt:

$$f_{X(t)}(n) = \Pr[S_n \leq t \leq S_{n+1}].$$

2. Nach Vorlesung sind für alle  $t > 0$  die Variablen  $X(t)$  Poisson-verteilt. Geben Sie eine explizite Darstellung der Dichtefunktion  $f_{X(t)}$  an.
3. Beweisen Sie die vorgenannte explizite Darstellung der Dichtefunktion  $f_{X(t)}$  durch direkte Berechnung und ohne Benutzung der Kenntnis, dass  $X(t)$  Poisson-verteilt ist.