Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$
\begin{aligned}
&= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}, \qquad \text{da } r^{\underline{k}} = 0 \text{ für } k > r\,.
\end{aligned}
$$

4.5 Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: „balls into bins“

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv $(n = r)$
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N nicht unterscheidbar R unterscheidbar	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
N nicht unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

4.6 Abzählen von Permutationen

4.6.1 Stirling-Zahlen der ersten Art

Definition 172

Die Stirling-Zahl der ersten Art

$$s_{n,k}$$

gibt die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Zyklen an.

Einfache Beobachtungen:

1. für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$$

2. $$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3. $$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4. $$s_{n,n} = 1$$

5. $$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k < 0.$$

4.6.2 Typ einer Permutation

Definition 173

Sei π eine Permutation von n Objekten, $b_i(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π der Länge i $(i = 1, \ldots, n)$ und $b(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π, also

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot b_i(\pi) = n \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i(\pi) = b(\pi).$$

Dann heißt der formale Ausdruck

$$1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} 3^{b_3(\pi)} \ldots n^{b_n(\pi)}$$

der Typ von π (Potenzen mit Exponent 0 werden gewöhnlich nicht geschrieben).

Beispiel 174

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (4\ 5\ 6\ 2\ 7\ 1\ 8\ 3)$$

als Funktionswerte

$$= (1\ 4\ 2\ 5\ 7\ 8\ 3\ 6)$$

in Zyklenschreibweise

Typ: 8^1

Beispiel 175

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ 4\ 7\ 1\ 6\ 5\ 3\ 8)$$

$$= (1\ 2\ 4)\ (3\ 7)\ (5\ 6)\ (8)$$

Typ: $1^1\ 2^2\ 3^1$

Lemma 176

Es gibt

$$\sum_{k=1}^{n} P_{n,k}$$

verschiedene Typen von Permutationen in S_n.

Beweis:

Klar. $\square$

Lemma 177

Es gibt

$$\frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \ldots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}}$$

verschiedene Permutationen in S_n *vom Typ* $1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}$ *(Beachte:* $0! = 1$*).*
Insbesondere gilt:

$$s_{n,k} = \sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n) \in {\mathbb{N}_0}^n \\ \sum b_i = k \\ \sum i \cdot b_i = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \ldots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}}$$

und

$$n! = \sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n) \in {\mathbb{N}_0}^n \\ \sum_{i=1}^{n} i \cdot b_i = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \ldots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}}.$$

Beweis:

Sei Typ $1^{b_1}\ 2^{b_2} \ldots n^{b_n}$ gegeben:

$$\overbrace{(\llcorner\!\lrcorner)(\llcorner\!\lrcorner)\ldots(\llcorner\!\lrcorner)}^{b_1}\overbrace{(\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner)(\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner)\ldots(\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner)}^{b_2}\ldots\overbrace{(\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner\llcorner\!\lrcorner\ldots\llcorner\!\lrcorner)}^{b_n(\leq 1)}$$

Insgesamt gibt es n freie Plätze. Ersetze die freien Plätze durch Permutationen aus S_n. Dafür gibt es $n!$ Möglichkeiten.

Nun muss beachtet werden, dass

- die Zyklen der Länge i beliebig vertauschbar sind, und
- ein Zyklus der Länge i in sich i-mal zyklisch geshiftet werden kann, ohne die Permutation zu ändern.

Damit ergeben sich für die Zyklen der Länge i oben genau $b_i! \cdot i^{b_i}$ verschiedene Anordnungen, so dass insgesamt alle Permutationen mit dem angegebenen Faktor überzählt werden. $\square$

Beispiel 178

$$s_{5,1} = \frac{5!}{1! \cdot 5^1} = 4! = 24$$

$$s_{5,2} = \sum_{\text{Typ}=1^1 4^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=2^1 3^1} 1 = \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1^1 \cdot 4^1} + \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 2^1 \cdot 3^1} = 50$$

$$s_{5,3} = \sum_{\text{Typ}=1^2 3^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=1^1 2^2} 1 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1^2 \cdot 3^1} + \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1^1 \cdot 2^2} = 35$$

4.7 Abzählkoeffizienten

4.7.1 Binomialkoeffizienten

Wir hatten bereits:

1.
$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \qquad \forall n \geq k > 0$$
$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall n > 0$$

2.
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \qquad \forall n \geq k > 0$$

3.
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \forall n \geq k > 0$$

Weiter definiert man:

1. $$n^{\underline{0}} := n^{\overline{0}} := 0! := 1 \qquad \forall n \in \mathbb{C}$$

2. $$\binom{0}{0} := 1$$

3. $$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1) \\ x^{\overline{k}} &= x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+k-1) \qquad \forall x \in \mathbb{C},\ k \geq 0 \end{aligned}$$

4. $$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 179

$\binom{x}{k}$ *ist, für $k \geq 0$, ein Polynom in x vom Grad k, und es gilt auch für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{C}$*

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

Beweis:

Da für $k \leq 0$ per Definition der Binomialkoeffizienten Gleichheit gilt, betrachten wir nur $k > 0$. Es ist dann

$$\binom{x}{k} - \left[\binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}\right]$$

ein Polynom in x vom Grad $\leq k$. Für alle $x \in \mathbb{N}$ ist dieses Polynom gleich 0. Ein Polynom einer Variablen mit unendlich vielen Nullstellen ist aber sicher identisch 0 (Fundamentalsatz der Algebra (Satz 139)).

Beweis (Forts.):

Eine weitere Möglichkeit, den Beweis zu führen:

$$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} = (k + x - k)(x-1)^{\underline{k-1}} \\ &= k \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} + (x-k)(x-1)^{\underline{k-1}} \\ &= k \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} + (x-1)^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(x-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(x-1)^{\underline{k}}}{k!} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

$\square$

Das Pascalsche Dreieck

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1	0	
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

benannt nach Blaise Pascal (1623–1662).

Beobachtung:

Die Zeilensumme in der n-ten Zeile ist 2^n.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Lemma 180

Für die Spaltensumme bis zur n-ten Zeile gilt:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \forall n, k \geq 0$$

Beweis:

(Vollständige Induktion über n)

Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{m=0}^{0} \binom{m}{k} = \binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\stackrel{!}{=} \binom{0+1}{k+1} = \binom{1}{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m}{k} &= \sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} \\
&= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}
\end{aligned}
$$

$\square$

Beispiel 181

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$k = 2, n = 5\ :$$

$$\sum_{m=0}^{5} \binom{m}{2} = \binom{6}{3}$$

Lemma 182

Für die Diagonalsumme gilt:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{m+n+1}{m} \qquad \forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{C}$$

Beweis:

(Vollständige Induktion über m)
Induktionsanfang: $m = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\stackrel{!}{=} \binom{0+n+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschluss $m \mapsto m+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{k} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} + \binom{m+n+1}{m+1} \\
&= \binom{m+n+1}{m} + \binom{m+n+1}{m+1} \\
&= \binom{m+n+2}{m+1}
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 183

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$m = 3, n = 2\ :$$

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{2+k}{k} = \binom{6}{3}$$

Beobachtungen:

- Negation

$$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k \cdot x^{\overline{k}}$$

- Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Spezialfälle des Binomialsatzes:

1. $x = y = 1$:
$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$
(Beweis zur Zeilensumme!)

2. $y = 1$:
$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

3. $x = -1, y = 1$ ($n = 0$ klar; sei also $n > 0$):
$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$$
$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Satz 184 (Vandermonde-Identität)

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \cdot \binom{y}{n-k} \qquad n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{C}$$

Beweis:

Seien zunächst $x, y \in \mathbb{N}$.

Zur Verdeutlichung sei z. B. x die Anzahl der Wahlmänner der Demokraten und y die Anzahl der Wahlmänner der Republikaner. $\binom{x+y}{n}$ ist dann die Anzahl der Möglichkeiten, aus $(x+y)$ Wahlmännern n auszuwählen. Dementsprechend ist $\binom{x}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus x Demokraten k auszuwählen, und $\binom{y}{n-k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus y Republikanern $(n-k)$ auszuwählen.

Damit überlegt man sich leicht, dass die Formel für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis (Forts.):

Erweiterung auf $x, y \in \mathbb{C}$: Setze $y =$ const. Damit stehen links und rechts ein Polynom n-ten Grades in x:

$$p_l(x) \stackrel{!}{=} p_r(x)$$

Für $x \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$p_l(x) - p_r(x) = 0$$

Dieses Polynom hat unendlich viele Nullstellen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist dann

$$p_l(x) - p_r(x) \equiv 0$$

Das heißt, $p_l(x)$ und $p_r(x)$ sind identisch. $\square$