Beweis (Forts.):

Umkehrabbildung: Gegeben $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$

```
for i = 1 to n do
    d(v_i) := f_i + 1
od
B := ∅; T := ∅
for i = 1 to n − 2 do
    b := min_{1≤j≤n} {j; j ∉ {a_i, a_{i+1}, ..., a_{n−2}} ∪ B}
    füge Kante (b, a_i) zu T hinzu
    B := B ∪ {b}
od
füge letzte Kante zu T gemäß Gradbedingung hinzu
```

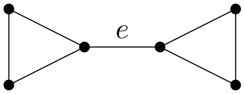
$\square$

2.13 Brücken

Definition 279

Eine Kante e eines Graphen $G = (V, E)$ heißt Brücke, falls $G' = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.

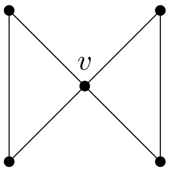
Beispiel 280



Beobachtung:

Eine Kante e ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen (einfachen) Kreis gibt, der e enthält.

Anmerkung: (ohne Definition)
Der Knoten v in der folgenden Abbildung ist ein Artikulationsknoten:



2.14 Abstand

Definition 281

Seien u, v zwei Knoten und P ein Pfad in G von u nach v mit einer minimalen Anzahl k von Kanten. Dann heißt

$$\mathrm{d}(u, v) := k$$

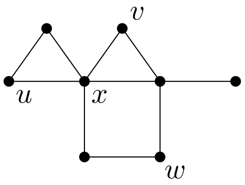
der Abstand von u und v in G.

Wir setzen $\mathrm{d}(u, v) := \infty$, falls u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G liegen.

$$\mathsf{D}(G) := \max\{\mathrm{d}(u, v); u, v \in V\}$$

heißt der Durchmesser des Graphen G.

Beispiel 282



$\mathrm{d}(u, v) = 2$, $\mathrm{d}(u, w) = 3$, $\mathrm{d}(u, x) = 1$, $\mathsf{D}(G) = 3$.

Beobachtung:

d erfüllt die Dreiecksungleichung, ist also eine Metrik:

$$\mathrm{d}(u, v) \leq \mathrm{d}(u, w) + \mathrm{d}(w, v)$$

2.15 Adjazenzmatrix

Definition 283

Sei $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Beobachtungen:

- Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch.
- Gibt es keine Schlingen, so sind alle Diagonalelemente null.

Satz 284

Sei A die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$, $|V| = n$, und sei

$$\begin{aligned} A^0 &:= I, \\ A^{i+1} &:= A^i \cdot A \qquad \text{für alle } i \geq 0. \end{aligned}$$

Dann gilt für

$$A^k = \left(a_{ij}{}^{(k)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} :$$

$a_{i,j}{}^{(k)}$ ist die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k in G von v_i nach v_j.

Achtung: Die Länge eines Pfades wird hier durch die Länge seiner Kanten- und nicht der Knotenfolge angegeben!

Beweis:

Induktion nach k:

Induktionsanfang: $k = 0$ und $k = 1$ sind trivial.

Induktionsschluss: $k \mapsto k + 1$

${a_{il}}^{(k)}$ ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k von v_i nach v_l.

Die Anzahl verschiedener Pfade von v_i nach v_j der Länge $k + 1$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sum_{l=1}^{n} {a_{il}}^{(k)} \cdot a_{lj} = {a_{ij}}^{(k+1)}$$

□

Bemerkung:

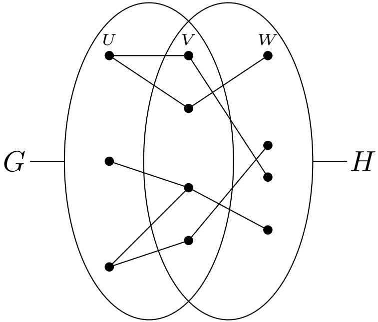
Adjazenzmatrix von bipartiten Graphen

Sei $G = (U, V, E)$ mit $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ein bipartiter Graph. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Werden zwei bipartite Graphen zusammengesetzt, zum Beispiel:



berechnet sich die Adjazenzmatrix A' des bipartiten Graphen $G' = (U, W, E')$, mit

$$\{u, w\} \in E' \iff (\exists v \in V)[\{u, v\} \text{ in } G \text{ und } \{v, w\} \text{ in } H]$$

als das boolesche Produkt $A_G \cdot A_H$:

Wir betrachten einfache ungerichtete Graphen.

Definition 285

Seien $A \in \mathbb{B}^{m,k}$, $B \in \mathbb{B}^{k,n}$ zwei boolesche Matrizen, interpretiert als $0,1$-Matrizen. Dann ist das boolesche Produkt $C = AB$ der beiden Matrizen gegeben durch

$$c_{i,j} = \bigvee_{l=1}^{k} a_{i,l} \wedge b_{l,j} \qquad \text{für } i \in [m], j \in [n]$$

2.16 Inzidenzmatrix

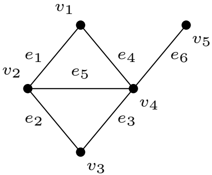
Definition 286

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \quad \text{mit} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von G.

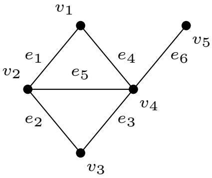
Beispiel 287 (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Adjazenzmatrix:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Inzidenzmatrix:

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(v_1) & & & \\ & \mathrm{d}(v_2) & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathrm{d}(v_n) \end{pmatrix} + A$$

3. Definitionen für gerichtete Graphen

3.1 Digraph

Definition 288

Ein Digraph (aka gerichteter Graph, engl. *directed graph*) $G = (V, A)$ besteht aus einer Knotenmenge V und einer Menge $A \subseteq V \times V$ von geordneten Paaren, den gerichteten Kanten.

3.2 Grad

Definition 289

- $\mathrm{d}^-(v)$ ist der Aus-Grad von v, d. h. die Anzahl der Kanten mit Anfangsknoten v.
- $\mathrm{d}^+(v)$ ist der In-Grad von v, d. h. die Anzahl der Kanten mit Endknoten v.
- $\mathrm{d}(v) = \mathrm{d}^-(v) + \mathrm{d}^+(v)$ ist der (Gesamt-)Grad von v.

Beobachtung:

$$\sum_{v\in V} \mathrm{d}^-(v) = \sum_{v\in V} \mathrm{d}^+(v) = |A|$$

3.3 Adjazenzmatrix

Definition 290

Sei $G = (V, A)$ ein Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad \text{mit } c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_i, v_j) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Falls G schlingenfrei ist, sind alle Diagonalelemente von C gleich 0.

3.4 Inzidenzmatrix

Definition 291

Sei $G = (V, A)$ ein einfacher(!) Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $A = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \text{ Endknoten von } e_j \\ -1 & \text{falls } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von G.

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(v_1) & & & 0 \\ & \mathrm{d}(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{d}(v_n) \end{pmatrix} - A'$$

Diese Matrix heißt Laplacesche Matrix. Dabei ist, für alle i, j, der Eintrag $a'_{i,j}$ die Anzahl der im zu G gehörigen ungerichteten Graphen zwischen v_i und v_j verlaufenden Kanten. Enthält G keine antiparallelen Kanten, ist damit A' gleich der Adjazenzmatrix dieses ungerichteten Graphen.

Beobachtung: Die Laplacesche Matrix ist symmetrisch.

3.5 Gerichteter Pfad

Definition 292

Eine Folge $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ mit $u_i \in V$ für $i = 0, \ldots, n$ heißt gerichteter Pfad, wenn

$$\left(\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}\right)\Big[(u_i, u_{i+1}) \in A\Big].$$

Ein gerichteter Pfad heißt einfach, falls alle u_i paarweise verschieden sind.

3.6 Gerichteter Kreis

Definition 293

Ein gerichteter Pfad $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ heißt gerichteter Kreis, wenn $u_0 = u_n$.
Der gerichtete Kreis heißt einfach, falls $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ alle paarweise verschieden sind.

3.7 dag

Definition 294

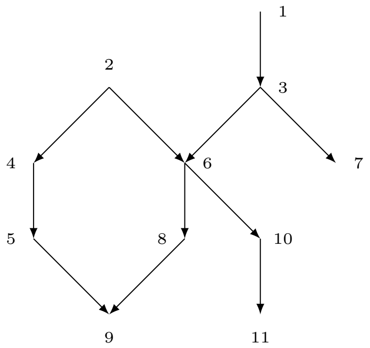
Ein Digraph, der keinen gerichteten Kreis enthält, heißt *directed acyclic graph*, kurz dag.

In einem dag heißen Knoten mit In-Grad 0 Quellen, Knoten mit Aus-Grad 0 Senken.

Eine Nummerierung $i : V \to \{1, \ldots, |V|\}$ der Knoten eines *dags* heißt topologisch, falls für jede Kante $(u, v) \in A$ gilt:

$$i(u) < i(v).$$

Beispiel 295



Algorithmus zur topologischen Nummerierung:

```
while V≠∅ do
   nummeriere eine Quelle mit der nächsten Nummer
   streiche diese Quelle aus V
od
```

3.8 Zusammenhang

Definition 296

Ein Digraph heißt zusammenhängend, wenn der zugrundeliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

3.9 Starke Zusammenhangskomponenten

Definition 297

Sei $G = (V, A)$ ein Digraph. Man definiert eine Äquivalenzrelation $R \subseteq V \times V$ wie folgt:

$$uRv \iff \begin{cases} \text{es gibt in } G \text{ einen gerichteten Pfad von } u \text{ nach } v \\ \text{und einen gerichteten Pfad von } v \text{ nach } u. \end{cases}$$

Die von den Äquivalenzklassen dieser Relation induzierten Teilgraphen heißen die starken Zusammenhangskomponenten von G.

Beispiel 298