Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Wir wissen, wie man aus einer natürlichen Zahl n die nächste natürliche Zahl $n+1$ gewinnt. Damit besitzen wir das Bildungsgesetz der generativen Aufschreibung $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ unserer ersten unendlichen Menge. Sie wird als ungeordnete Zusammenfassung der Gesamtheit der natürlichen Zahlen zu einer Menge $\mathbb{N}$ konstruiert. Davon ausgehend konstruiert man dann die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Diese Mengen können wir nun als Universum oder Grundmenge benützen.

1. Vergleichen Sie die durch die Aufschreibungen $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 7, 5, 3\}$, $\{1, 3, 5, 7, 5, 3, 1\}$, $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $\{1 + 2n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$, $\{1 + |2n|\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ definierten Mengen. Welche dieser Mengen sind paarweise gleich, ungleich? Begründung!

2. Wir betrachten die Mengen $\{(-1)^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{|-1|^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{1, -1, 1, -1, \ldots\}$, $\{-1, 1\}$. Welche dieser Mengen sind paarweise gleich, ungleich? Begründung!

3. Wir betrachten hierarchische Mengen- und Tupelstrukturen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Elemente bzw. Komponenten besitzen jeweils die Objekte
$\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$, $(1, 1, 1, \ldots, 1^n)$, $\{1, 1, 1, \ldots, 1^n\}$, $\{(1, 1), (1, 1)\}$, $(\{1, 1\}, \{1, 1\})$?

4. Eine intensionale Beschreibung $M = \{x \in U\,;\, P(x)\}$ gibt an, welche Eigenschaft P ein Element x eines Universums U haben muss, um in M enthalten zu sein. Geben Sie eine intensionale Beschreibung an für die Mengen $\{(-1)^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ und $\{1+2n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$!

Lösung

1. Mengen sind ungeordnete Zusammenfassungen von Objekten. Ein bestimmtes Objekt kommt in der Menge immer nur ein einziges Mal vor, auch wenn es in einer aufzählenden (extensionalen) Schreibweise mehrfach genannt wird. Es folgt

   $$\{1, 3, 5, 7\} = \{1, 7, 5, 3\} = \{1, 3, 5, 7, 5, 3, 1\}\,.$$

   Die Gleichheit von Mengen wird überprüft, indem festgestellt wird, ob jedes Element der einen Menge in der anderen Menge enthalten ist und umgekehrt.

   Die übrigen drei Mengen sind unendlich und deshalb nicht gleich mit einer der vorgenannten Mengen. Zum Beweis der Ungleichheit genügt es festzustellen, dass die Zahl 11 in den ersten 3 Mengen nicht enthalten ist, wohl aber in den übrigen Mengen.

   Offenbar gilt $\{1, 3, 5, 7, \ldots\} = \{1 + 2n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$, weil die erste Aufschreibung genau das Bildungsgesetz informell nahelegt, das in der zweiten Aufschreibung explizit gemacht wird. Definiert wird in beiden Fällen die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Beweis der Gleichung $A = \{1+2n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\} = \{1+|2n|\,;\, n \in \mathbb{Z}\} = B$ wie folgt:

Sei $x \in A$. Dann gilt $x = 1+2n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $2n = |2n|$ und $n \in \mathbb{Z}$ folgt $x = 1+|2n|$, mithin nach Definition $x \in B$.

Sei umgekehrt $x \in B$. Dann gilt $x = 1+|2n|$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Wegen $|2n| = 2|n|$ und $|n| \in \mathbb{N}_0$ folgt $x = 1+2|n| \in A$.

2. Zunächst gilt $\{1,-1,1,-1,\ldots\} = \{-1,1,-1,1,-1,\ldots\}$. Und es gilt $\{(-1)^n\,;\, n \in \mathbb{N}\} = \{1,-1,1,-1,\ldots\}$, denn offenbar beschreibt die rechte Seite der Gleichung nur informell die linke Seite.

   Es gilt aber $\{(-1)^n\,;\, n \in \mathbb{N}\} = \{-1,1\}$, denn $(-1)^n = 1$ oder $(-1)^n = -1$.

   Schließlich gilt $\{|-1|^n\,;\, n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$, da $|-1|^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3. Es gilt

   $|\{1,2,3,\ldots,2^n\}| = 2^n\,,\ \ |\{1,1,1,\ldots,1^n\}| = 1$ und $|\{(1,1),(1,1)\}| = 1\,.$

   Die Anzahl der Komponenten von $(1,1,1,\ldots,1^n)$ ist n,
   die Anzahl der Komponenten von $(\{1,1\},\{1,1\})$ ist 2.

4. Es gilt $\{x \in \mathbb{Z}\,;\; x{=}1 \text{ oder } x{=}{-1}\} = \{(-1)^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ und
   $\{x \in \mathbb{N}\,;\; 2 \text{ ist Teiler von } x{+}1\} = \{1{+}2n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}\,.$

Vorbereitung 2

Ausgehend von bereits gebildeten Mengen kann man weitere Mengen gewinnen z. B. durch die Operationen Vereinigung $\,.\cup.\,$, Durchschnitt $\,.\cap.\,$, Differenz $\,.\setminus.\,$, symmetrische Differenz $\Delta(\,.\,,\,.\,)$, Komplement $\overline{(\,.\,)}$.

1. Sei $A = \{1,2,3,4\}$. Beschreiben Sie A als Durchschnitt 5-elementiger Mengen, als Vereinigung 3-elementiger Mengen, als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen, als Komplement einer Menge, als symmetrische Differenz von zwei verschiedenen Mengen!

   Listen Sie alle Teilmengen von A auf und erfinden Sie eine sinnvolle Sortierung für Ihre Liste!

Für beliebige Mengen A und B kann man obige Operationen in beliebiger Auswahl und beliebig oft auf die jeweiligen Ergebnisse anwenden. Dann aber stellt sich die Frage, wie viele Mengen man auf diese Weise höchstens erhalten kann. Tatsächlich kann diese Frage durch ein Venn-Diagramm entschieden werden.

2. Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit den Mengen $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ und dem umfassenden Universum $U = \{1,2,3,4\}$. Wie viele verschiedene Mengen können innerhalb dieses Diagramms definiert werden? Geben Sie jeweils an, durch welche Operationsanwendungen diese Mengen aus A und B gewonnen werden können.

Lösung

1. (a) $\{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,4,6\} = A$.

   (b) $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,2,3,4\} = \{1,2,3,4\} = A$.

   (c) $\{1,2\} \cup \{3,4\} = A$.

   (d) Wir setzen $B = \{x \in \mathbb{N}\,;\, 5 \leq x\}$ und betrachten die Komplementbildung von B bezüglich $\mathbb{N}$. Dann gilt $x \in \overline{B}$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{N}$ und gleichzeitig x nicht in B gilt. Letzteres heißt aber $x \in \mathbb{N}$ und $5 \not\leq x$, d. h. $x \in \mathbb{N}$ und $x < 5$. Nach Definition heißt das $\overline{B} = A$.

   (e) Seien $B = \{1,2,5\}$ und $C = \{3,4,5\}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} B\Delta C &=& (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \\ &=& (\{1,2,5\} \setminus \{3,4,5\}) \cup (\{3,4,5\} \setminus \{1,2,5\}) \\ &=& \{1,2\} \cup \{3,4\} \\ &=& \{1,2,3,4\} \;=\; A\,. \end{array}$$

   (f) Man kann wie folgt sortieren: Wir listen zuächst alle Teilmengen auf, die die 1 enthalten, und anschließend die Teilmengen, die die 1 nicht enthalten. Das entsprechende Sortierverfahren wenden wir für beide Hälften an mit der 2 als Kriterium usw.. Wir erhalten die 16 Teilmengen wie folgt.

$$\begin{array}{llll} \{1,2,3,4\}\,, & \{1,2,3\}\,, & \{1,2,4\}\,, & \{1,2\}\,, \\ \{1,3,4\}\,, & \{1,3\}\,, & \{1,4\}\,, & \{1\}\,, \\ \{2,3,4\}\,, & \{2,3\}\,, & \{2,4\}\,, & \{2\}\,, \\ \{3,4\}\,, & \{3\}\,, & & \\ \{4\}\,, & \{\}\,. & & \end{array}$$

2. (Zeichnung Venn-Diagramm: symbolische Kreise um die Elemente 1 und 2 bzw. 2 und 3 bzw. 1, 2, 3 und 4)

   Wegen $|U| = 4$ besitzt U genau 16 Teilmengen. Tatsächlich kann man alle diese 16 Mengen aus den Mengen A und B durch Operationsanwendungen gewinnen, z. B. wie folgt.

$$\begin{array}{rlrlrlrl} A \cap B = & \{2\}\,, & \overline{A} \cap B = & \{3\}\,, & A \cap \overline{B} = & \{1\}\,, & \overline{A} \cap \overline{B} = & \{4\}\,, \\ A \cup B = & \{1,2,3\}\,, & \overline{A} \cup B = & \{2,3,4\}\,, & A \cup \overline{B} = & \{1,2,4\}\,, & \overline{A} \cup \overline{B} = & \{1,3,4\}\,, \\ \overline{A} = & \{3,4\}\,, & \overline{B} = & \{1,4\}\,, & \Delta(A,B) = & \{1,3\}\,, & \overline{\Delta(A,B)} = & \{2,4\}\,, \\ A = & \{1,2\} & B = & \{2,3\}\,, & A \cup \overline{A} = & \{1,2,3,4\}\,, & A \cap \overline{A} = & \{\}\,. \end{array}$$

   Natürlich könnte man A durch $(A \cup \overline{A}) \setminus \overline{A}$ zurückgewinnen, entsprechend auch B. Das ist aber nicht notwendig, wenn man einen „Identitätsoperator“ hinzunimmt, der zu jeder Menge sie selbst wieder zurückliefert.

   Hinweis: Die erste Zeile enthält bereits die wichtigsten Teilmengen des Venn-Diagramms. Dies sind genau die vier disjunkten Teilmengen, aus denen man alle anderen Teilmengen durch Vereinigung darstellen kann. Sogar die leere Menge kann man aus diesem Prinzip heraus bekommen, und zwar durch eine „leere Vereinigung“.

Wir haben hier schon Mal, salopp gesprochen, einen Köder ausgelegt, der uns auf der Spur der Vereinigung disjunkter Mengen von den Venn-Diagrammen bis weit in die Logik zu Booleschen Normalformen beliebiger logischer Ausdrücke führen wird. Das wird noch spannend!

Vorbereitung 3

Wir fassen die Buchstaben a, b und c zu einer Menge Σ zusammen.

1. Listen Sie alle 2-Tupel (x, y) (Wörter der Länge 2) auf, wobei x und y Buchstaben aus Σ bedeuten. Notieren Sie dabei Tupel als Wörter.
2. Man sagt, dass Σ ein Alphabet ist mit der natürlichen Ordnung der Zeichen (a kommt vor b, und b kommt vor c, und insgesamt kommt a auch vor c).

   Wie viele Buchstaben-3-Tupel (x_1, x_2, x_3) (Wörter der Länge 3) über Σ gibt es, so dass x_2 nicht vor x_1 kommt und x_3 weder vor x_2 noch vor x_1 kommt? Begründung!
3. Gibt es über Σ eine reflexive Relation R der Kardinalität 1? Begründung!
4. Sei $S = \{(ab, bc), (bc, ca)\}$. Geben Sie Bild und Urbild des Relationenprodukts $S \circ S$ an!

Lösung

1. Bei Tupel können Objekte mehrfach vorkommen und es kommt auf die Reihenfolge an.
$$\begin{array}{lll} aa\,, & ab\,, & ac\,, \\ ba\,, & bb\,, & bc\,, \\ ca\,, & cb\,, & cc\,. \end{array}$$
2. Die gesuchte Anzahl ist $1 + (1 + 2) + ((1 + 2) + 3) = 10$.

   Die Begründung ist durch die folgende Auflistung gegeben.
$$\begin{array}{lll} aaa\,, & aab\,, & aac\,, \\ abb\,, & abc\,, & \\ acc\,, & & \\ bbb\,, & bbc\,, & \\ bcc\,, & & \\ ccc\,. & & \end{array}$$
3. Antwort: Nein!

   Da R reflexiv ist, enthält R mindestens alle Paare (x, x) für $x \in \Sigma$. Wegen $|\Sigma| = 3$ folgt also $|R| \geq 3$.
4. Das Relationenprodukt $S \circ S$ enthält genau alle Paare (x, z), die aus einer geeigneten „Verkettung“ $(x, y) \in S$ mit $(y, z) \in S$ hervorgehen. Man muss nur jeweils ein geeignetes $y \in \Sigma^*$ finden.

Für $x = ab, z = ca$ liefert gerade $y = bc$ das Gewünschte. Daraus folgt $(ab, ca) \in S \circ S$.

Offenbar gibt es aber keine anderen Verkettungsmöglichkeiten, so dass $S \circ S = \{(ab, ca)\}$ gilt.

Wir bezeichnen im Folgenden das Bild bzw. das Urbild einer Relation $R \subseteq A \times B$ mit $Bild(R)$ bzw. $Urbild(R)$. Nach Vorlesung gilt

$$\begin{aligned} Bild(R) &= \{y\,;\text{ es gibt ein Paar } (x, y) \in R\}\,, \\ Urbild(R) &= \{x\,;\text{ es gibt ein Paar } (x, y) \in R\}\,. \end{aligned}$$

Es folgt $Bild(S \circ S) = \{ca\}$ und $Urbild(S \circ S) = \{ab\}$.