
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 29. November 2011, 14 Uhr in die DS Briefkästen

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Falls F und $\neg F$ erfüllbare aussagenlogische Formeln sind, dann ist $F \wedge \neg F$ erfüllbar.
2. $(-13) \bmod 7 = 8$.
3. Es gibt eine Funktion $f(n)$ mit $n \in o(f(n))$ und $f(n) \in o(n^2)$.
4. Die Mathematiker Leonhard Euler und Pierre de Fermat sind sich in Paris begegnet.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

1. Wir bezeichnen den folgenden aussagenlogischen Ausdruck mit F :

$$p \equiv (q \Rightarrow \neg r).$$

- (a) Bestimmen Sie die Semantik von F als boolesche Funktion (Wahrheitsfunktion) $F(p, q, r)$ durch Angabe der Wahrheitstabelle.
 - (b) Konstruieren Sie eine zu F äquivalente Darstellung in disjunktiver Normalform.
2. Eine aussagenlogische Formel G mit Variablen p, q, r sei wie folgt in ihrer disjunktiven Normalform gegeben.

$$G = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

Bestimmen Sie eine zu G äquivalente Formel H in konjunktiver Normalform.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Für jede binäre Relation R über M definieren wir die Eigenschaft von R , eine *Autorität x zu enthalten*, wie folgt:

$$(\exists x \in M \forall y \in M) [(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R]. \quad (1)$$

1. Geben Sie eine Relation R über M an, die die Formel (1) wahr macht.
2. Wir bezeichnen die Formel (1) mit E . Geben Sie eine pränexe prädikatenlogische Formel an, die äquivalent ist zu $\neg E$.
3. Geben Sie eine Relation Q über M an, so dass $\neg E$ gilt, d.h., dass die Relation Q keine Autorität x enthält.
4. Zeigen Sie durch Widerspruchsbeweis, dass für jede transitive Relation R über M die Formel (1) wahr ist.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Das Wachstumsverhalten $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ ist definiert durch den pränexen prädikatenlogischen Ausdruck

$$(\exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0) [|f(n)| \leq c \cdot g(n)]. \quad (1)$$

1. Geben Sie für das Wachstumsverhalten $f(n) \notin \mathcal{O}(g(n))$ einen pränexen prädikatenlogischen Ausdruck an.
2. Es gelte $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$. Man zeige:

$$(\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0) [|f(n)| \leq c \cdot g(n)]. \quad (2)$$

3. Es gelte (2). Man zeige $f \in \mathcal{O}(g(n))$.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

1. Wir betrachten 4-elementige Gruppen $G = \langle S, \circ, e \rangle$ mit Trägermenge $S = \{e, a, b, c\}$ und Einselement e , die nicht zyklisch sind.
 - (a) Zeigen Sie, dass für alle Elemente $x \in S$ die Gleichung $x^2 = e$ gilt.
 - (b) Leiten Sie eine Verknüpfungstafel für \circ her.
Wie viele Verknüpfungstafeln für \circ gibt es?
2. Begründen Sie, warum jede Gruppe mit 4 Elementen kommutativ sein muss.

Zusatzaufgabe (Für Interessierte)

Wir betrachten Algebren $A = \langle S, \circ, e \rangle$ mit Einselement e , die die beidseitigen Kürzungsregeln („Sudoku-Regeln“) erfüllen, d. h., dass für alle $x, y, z \in S$ die folgenden Implikationen gelten:

$$x \circ z = y \circ z \implies x = y, \quad (1)$$

$$z \circ x = z \circ y \implies x = y. \quad (2)$$

1. Zeigen Sie: Falls $|S| \leq 4$ gilt, dann ist A eine Gruppe.
2. Sei $|S| = 5$. Geben Sie bis auf Isomorphie alle nicht assoziativen Verknüpfungen \circ mit obigen Eigenschaften an. Die entsprechenden Algebren sind dann also keine Gruppen.

Hinweis: Wählen Sie $S = \{e, a, b, c, d\}$, und betrachten Sie isomorphe Algebren als gleich.

— *** —

Die besten Lösungsdarstellungen werden prämiert!!

— *** —

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

1. Man zeige:

In einem beliebigen Ring $\langle R, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$ gelten die folgenden Gleichungen.

$$a \odot 0 = 0 \odot a = 0, \quad a \odot b = (-a) \odot (-b).$$

2. Geben Sie zwei nichtkommutative Ringe an.

Vorbereitung 2

Beweisen Sie:

1. Es gibt bis auf Isomorphie genau einen Ring $R = \langle S, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$ mit drei Elementen, d. h. $S = \{0, 1, a\}$. Insbesondere also muss R isomorph sein zum Ring $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3, 0, 1 \rangle$.
2. Der Ring $R = \langle S, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$ mit drei Elementen ist ein Körper.
3. Sei t_x die Anzahl der *co*-Nullteiler eines Ringelementes $x \in S \setminus \{0\}$ eines endlichen, kommutativen Ringes $\langle S, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$.

Dann ist $t_x + 1$ ein Teiler der Anzahl $n = |S|$ aller Ringelemente.

Dabei heiÙe $y \in S \setminus \{0\}$ *co*-Nullteiler von $x \in S \setminus \{0\}$, falls $x \odot y = 0$.

Vorbereitung 3

In gewissen kommutativen Ringen $R = \langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ stellt sich der erweiterte Euklidische Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers $\text{ggT}(a, b)$ zweier Elemente $a \in S$ und $b \in S$ dar als eine iterierte Transformation (Matrixmultiplikation) Q_i angewandt auf Δ_{i-1} wie folgt mit $r_0 = a$ und $r_1 = b$.

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \Delta_i = \begin{pmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = Q_i \Delta_{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix}, \quad i := 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}.$$

Dabei werden die Quotienten q_i so gewählt (geschätzt), dass die Δ_i mit wachsendem i in einem gewissen Sinn stets echt kleiner werden. Eine Berechnung wird beendet, wenn die Folge der Δ_i maximale Länge besitzt, d. h. wenn kein Quotient existiert, der die Bildung eines noch kleineren Restes erlaubt. Zur Bemessung der Größe von Elementen eines Ringes dient beispielweise im Ring der ganzen Zahlen $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ die Betragsfunktion. In Polynomringen wird der Grad eines Polynoms verwendet.

Wir betrachten im Folgenden den Ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ der ganzen Zahlen.

1. Zeigen Sie für alle entsprechenden i

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(r_i, r_{i+1}).$$

2. Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den $\text{ggT}(10800, 122)$.

Tutoraufgabe 1

Die Menge der Permutationen der Teilmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ der natürlichen Zahlen bildet zusammen mit der Komposition \circ von Abbildungen die Gruppe \mathcal{S}_4 . Das neutrale Element der Gruppe sei id . Wir betrachten die in Zyklusschreibweise gegebenen Permutationen

$$p = (1\ 2)(3)(4) \quad \text{und} \quad q = (1)(2)(3\ 4).$$

1. f heißt involutorisch, falls $f \circ f = id$ gilt. Zeigen Sie, dass p und q involutorisch sind.
2. Zeigen Sie, dass $p \circ q = q \circ p$ gilt.

Seien $r = p \circ q$ und $U = \{id, p, q, r\}$.

3. Geben Sie die \circ -Verknüpfungstafel für die Elemente aus U an.
4. Beweisen Sie, dass die Menge U mit jedem Element $x \in U$ auch sein Inverses x^{-1} enthält (mit $x \circ x^{-1} = id$).
5. Ist die Gruppe U zyklisch? Beweisen Sie Ihre Antwort!
6. Aus den obigen Aussagen folgt, dass U eine Untergruppe von \mathcal{S}_4 ist.
Ist die Gruppe $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ isomorph zur Gruppe U ? Begründung!

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten Algebren $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einer 2-elementigen Trägermenge $S = \{a, b\}$ und einem 2-stelligen Operator \circ . Bekanntlich gibt es 16 verschiedene Algebren dieser Art, auf die wir uns im Folgenden beziehen.

1. Geben Sie eine Verknüpfungstafel für einen nicht assoziativen und gleichzeitig nicht kommutativen Operator \circ an.
2. Geben Sie alle Booleschen Operatoren an, die kommutativ und gleichzeitig nicht assoziativ sind.

Tutoraufgabe 3

1. Die Charakteristik eines Körpers K , i. Z. $char(K)$, ist definiert als die Ordnung des Elements 1 in der additiven Gruppe von K . Man zeige:

$$p = char(K) \in \mathbb{N} \Rightarrow p \text{ ist eine Primzahl.}$$

2. Geben Sie die Verknüpfungstafeln eines Körpers mit 4 Elementen an. Welche Charakteristik hat dieser Körper?
Begründen Sie Ihre Angaben!

Tutoraufgabe 4

Berechnen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus ganze Zahlen m, n , so dass

$$81m + 128n = 1.$$