1 Färbung planarer Graphen

1.1 Problemstellung

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem Färben von planaren Graphen. Dieses Problem ist beispielsweise für die beiden folgenden Anwendungen relevant:

- Können die Länder einer Landkarte mit nur 4 Farben so gefärbt werden, dass benachbarte Länder unterschiedliche Farben erhalten?
- Wie müssen die Frequenzen in Mobilfunknetzen den Sendemasten zugeteilt werden, dass möglichst wenige Frequenzen benötigt werden?
- Sudoku.

Eine Färbung eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ordnet jedem Knoten v (Kante e, Fläche f) aus V (E, F) eine natürliche Zahl $c(v) \in \mathbb{N}$ ($c(e)$, $c(f)$) zu, die auch Farbe genannt wird. Eine Färbung heißt *zulässig*, falls je zwei benachbarten Knoten (Kanten, Flächen) eine unterschiedliche Farbe zugewiesen wird. Man unterscheidet zwischen Knoten-, Kanten- oder Flächen-Färbung. Eine Färbung, die k verschiedene Farben verwendet, heißt k-Färbung. $\gamma(G) = \min\{k \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$ heißt *chromatische Zahl.*

Im Allgemeinen ist das Entscheidungsproblem, ob ein Graph k-färbbar ist, NP-schwer.

Definition 1 (Planarer Graph) *Ein Graph G ist planar, wenn die Knoten in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) eingebettet werden können, so dass sich die Kanten $e \in E$ nur in den Knoten kreuzen.*

Wir betrachten nun die Knoten-Färbung eines planaren Graphen G. Dafür ist folgender Satz hilfreich:

Satz 2 (Satz von Euler) *Seien n, e und f die Anzahl der Knoten, Kanten und Flächen eines planaren Graphen G. Dann gilt*

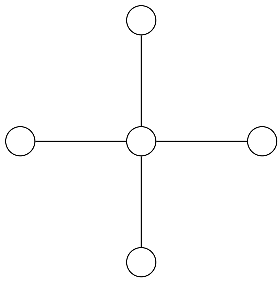
$$n - e + f = 2.$$

Beweis: Beweis durch Induktion über n.
Für $n = 1$ besteht der Graph G nur aus einer Menge von Schlingen. Falls $e = 0$, so existiert genau eine Fläche. Für $e > 0$ teilt jede Schleife eine Fläche in zwei Flächen, und somit ist die Induktionsannahme für $n = 1$ und $e \geq 0$ erfüllt.
Sei $n > 1$. Falls G zusammenhängend ist, können wir eine Kante finden, die keine Schleife ist. Anschließend können wir diese Kante "zusammenziehen" und wir erhalten einen Graphen G' mit n' Knoten, e' Kanten und f' Flächen. Durch das "Zusammenziehen" ändert sich nicht die Anzahl der Flächen, die Anzahl der Knoten und Kanten verringert sich aber um 1. Eingesetzt in die Hypoythese: $n - e + f = n' + 1 - (e' + 1) + f = 2$. $\square$

Bemerkung 3 *Der Satz von Euler ist nur gültig in zusammenhängenden Graphen. Die allgemeine Formel für einen planaren Graph G mit k Zusammenhangskomponenten lautet:*

$$n - e + f = k + 1.$$

Lemma 4 *Jeder Graph G mit maximalem Grad d kann mit d+1 Farben gefärbt werden.*



Satz 5 (5-Farben Satz von Heawood) *Jeder planare Graph ist 5-färbbar.*

Beweis: $|V| \leq 5$: trivial.
Sei $G = (V, E)$ ein minimaler nicht 5-färbbarer planarer Graph. Sei $v \in V$ ein Knoten mit $deg(v) \geq 5$. Durch die Wahl von G ist der Graph $G \setminus \{v\}$ 5-färbbar. Sei $f : V \setminus \{v\} \rightarrow \{1, ...5\}$ eine 5-Färbung von $G \setminus \{v\}$. Da G nicht 5-färbbar ist, ist jeder Nachbar in der Nachbarschaft $N(v)$ von v mit einer anderen Farbe gefärbt. Wir färben die Nachbarn $v_1, \ldots, v_5$ von v im Uhrzeigersinn mit den Farben $1, ..., 5$.

Sei $G_{1,3}$ der Teilgraph von G, der alle Knoten mit den Farben 1 und 3 enthält. In diesem Graphen können wir die beiden Farben jeder Komponente austauschen, und wir erhalten eine neue 5-Färbung von $G \setminus \{v\}$. Die Komponente, die Knoten v_1 enthält, muss auch Knoten v_3 enthalten, ansonsten können wir die Komponente, die v_3 enthält so umfärben, dass $v_3 \in N(v)$ Farbe 1 erhält und der Graph G somit 5-färbbar ist.

Sei $P_{1,3}$ der Pfad in $G_{1,3}$ von Knoten v_1 nach v_3. Betrachte nun den Kreis, der durch den Pfad $P_{1,3}$ und Knoten v definiert ist. Dieser Kreis trennt die Knoten v_2 und v_4. Aus diesem Grund muss der Pfad $P_{2,4}$ den Pfad $P_{1,3}$ kreuzen. Da G ein planarer Graph ist, ist eine Kreuzung nur in einem Knoten zulässig. Da die Knoten aus $P_{1,3}$ die Farben 1 oder 3 und $P_{2,4}$ die Farben 2 oder 4 besitzen, kann eine Kreuzung der Kanten an einem Knoten nicht erfolgen. $\square$

Satz 6 (4-Farben-Satz) *Jeder planare Graph ist 4-färbbar.*

Anmerkung: Erst 1977 konnten Ken Appel und Wolfgang Haken einen Beweis finden. Der Beweis reduzierte die Anzahl der problematischen Fälle von Unendlich auf 1936 (eine spätere Version sogar 1476), die durch einen Computer einzeln geprüft wurden. 1996 konnten Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour und Robin Thomas einen modifizierten Beweis finden, der die Fälle auf 633 reduzierte. Auch diese mussten per Computer geprüft werden.

1.2 Algorithmus

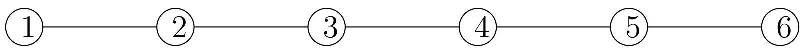
Betrachten wir den in Abbildung 1 angegebenen Greedy-Ansatz:

func Greedy-Färbung 1((V, E)**)**

$\forall v \in V$ do
    färbe v mit der nächsten freien Farbe
od

Abbildung 1: Greedy-Färbung 1

Klar ist, dass dieser Algorithmus eine gültige Färbung des Graphen G bestimmt, mit einer Laufzeit von $O(|V|+|E|)$. Diese Färbung kann aber beliebig schlecht werden. Siehe dazu folgendes Beispiel. Obwohl nur 2 Farben nötig sind, verwendet der Algorithmus 6 Farben.



Der Algorithmus in Abbildung 1 kann durch eine einfache Modifizierung verbessert werden. Betrachte dazu den Algorithmus in Abbildung 2

func Greedy-Färbung 2((V, E)**)**

$\forall v \in V$ do
    $c[v] = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq c[w] \quad \forall e = \{v, w\}\}$
od

Abbildung 2: Greedy-Färbung 2

Der Algorithmus in Abbildung 2 benötigt im Allgemeinen weniger Farben als der Algorithmus in Abbildung 1, bei gleicher Laufzeit $O(|V| + |E|)$. Für das obige Beispiel benötigt dieser Algorithmus nur 2 Farben. Aber auch hier kann die Färbung beliebig schlecht werden.

Lemma 7 *Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt es eine Anordnung σ der Knoten $v \in V$, so dass der Greedy-Algorithmus in Abbildung 2 eine optimale Färbung bestimmt.*

Beweis: Seien $c_1, ..., c_{\gamma(G)}$ die Farben des optimal gefärbten Graphen G. Sei L_{c_i} die Liste der Knoten mit Farbe c_i Wähle σ wie folgt: $\sigma = L_{c_1} \circ ... \circ L_{c_{\gamma(G)}}$. Auf dieser Anordnung der Knoten liefert der Greedy-Algorithmus 2 eine optimale Färbung. $\square$

Leider können wir eine optimale Anordung der Knoten aus V nicht im Voraus bestimmen. In vielen Fällen reicht es aus, eine „gute“ Färbung des Graphen G zu bestimmen. Dafür ist es ausreichend, eine „gute“ Anordnung der Knoten zu finden. Betrachtet man einen zu färbenden Knoten $v \in V$, so sind alle Farben $c[n_i]$ der Nachbarknoten $N(v)$ „verboten“. Das bedeutet, dass für Knoten mit hohem Grad viele Farben „verboten“ sind. Knoten mit niedrigem Grad erlauben eine flexiblere Wahl der Farbe, daher ist es intuitiv zuerst die anderen Knoten (jene mit hohem Grad) zu färben.

Daraus lässt sich der Algorithmus 3 ableiten: Dieser Algorithmus bestimmt im Allgemeinen eine „gute“ Färbung eines Graphen G in Laufzeit $O(|V|\log|V| + |E|)$

func Greedy-Färbung 3((V, E)**)**

Ordne die Knoten $v \in V$ nach nicht-aufsteigendem Grad $deg(v) \to \sigma[.]$

for $i = 1$ to $|\sigma|$ do
$c[\sigma[i]] = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq c[w] \quad \forall e = \{\sigma[i], w\}\}$
od

Abbildung 3: Greedy-Färbung 3

Literatur

[1] K. Appel and W. Haken, *Every Planar Map is Four Colorable, Part I: Discharging.* Illinois J. Math., 21, 429-490, 1977.

[2] L. Euler, *Demonstratio Nonullarum Insignium Proprietatum Quibus Solida Hedris Planis Inculsa Sunt Praedita.* Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrol, 4, 140-160, 1758.

[3] P.J. Heawood, *Map-Color Theorem.* Q. J. Math., 24, 332-339, 1890.