Beispiel 36

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und n ungerade. Dann lässt sich n als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

Beweis:

Falls $n = x^2 - y^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$, dann gilt $n = (x - y)(x + y)$.
Sei nun $s := x + y$ und $t := x - y$. Dann ist

$$s > t > 0$$
$$n = s \cdot t$$
$$x = (s + t)/2$$
$$y = (s - t)/2$$

Also müssen s und t beide gerade oder beide ungerade sein.

Beweis (Forts.):

Da

$$
\begin{aligned}
s &> t > 0\\
n &= s \cdot t\\
x &= (s+t)/2\\
y &= (s-t)/2
\end{aligned}
$$

kann man für ungerades n stets $s := n$ und $t := 1$ setzen und erhält damit $x = (n+1)/2$ und $y = (n-1)/2$, die die Behauptung erfüllen! □

Bemerkungen:

1. Falls n eine ungerade Primzahl ist, sind s und t eindeutig bestimmt und es gibt genau eine Lösung für x und y.
2. Für allgemeine n kann es mehr als eine Lösung geben, z.B. für $n = 15$

$$s = 5, t = 3 \text{ und } 15 = 16 - 1\,, \text{ oder}$$
$$s = 15, t = 1 \text{ und } 15 = 64 - 49\,.$$

3. Auch für gerade n kann es Lösungen geben, z.B.

$$8 = 9 - 1$$
$$48 = 7^2 - 1^2$$
$$48 = 8^2 - 4^2$$

4.7 Einige Sprechweisen

1. Wir sagen
   „Eine Bedingung/Eigenschaft A ist hinreichend für eine Eigenschaft B“,
   falls
   $$A \Rightarrow B\,.$$

2. Wir sagen
   „Eine Bedingung/Eigenschaft A ist notwendig für eine Eigenschaft B“,
   falls
   $$A \Leftarrow B \text{ (bzw. } B \Rightarrow A\text{)}\,.$$

3. Wir sagen
   „Eine Bedingung/Eigenschaft A ist notwendig und hinreichend für eine Eigenschaft B“,
   falls
   $$A \Leftrightarrow B \text{ (bzw. } A \equiv B\text{)}\,.$$

4.8 Folgen und Grenzwerte

R bezeichne einen Bereich wie z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}_0$, oder $\mathbb{Z}$.

Definition 37

1. Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Eine endliche Folge reeller (bzw. rationaler, natürlicher, ganzer) Zahlen

$$(a_i)_{0 \leq i \leq k}$$

ist eine Abbildung

$$\{0, 1, \ldots, k\} \ni i \mapsto a_i \in R\,.$$

2. Eine unendliche Folge

$$(a_n)_{n \geq 0}$$

ist eine Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto a_n \in R\,.$$

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine reelle Folge.

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen
   „Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert für $n \to \infty$ nach a“,
   und schreiben
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$
   falls gilt:
   $$(\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon)[|a_n - a| < \epsilon]\,.$$

2. Wir sagen
   „Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $+\infty$“,
   und schreiben
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\,,$$
   falls gilt:
   $$(\forall M \in \mathbb{N}\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_M)[a_n > M]\,.$$

Beispiel 38

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $a_n := \frac{1}{n} \sin n$.
Behauptung:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (für $n \to \infty$) gegen 0.

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, $N > \epsilon^{-1}$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} |\sin n| \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{N} < \epsilon\,.$$

□

Bemerkungen:

1. Falls es für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$

so sagen wir, „die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ divergiert für $n \to \infty$“.

2. Konvergenz gegen $-\infty$ wird entsprechend definiert.

3. Für Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to R$ wird das Konvergenzverhalten (bzw. $\lim_{n\to\infty} f(n)$) analog definiert (indem man die Folge $(f(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ betrachtet!).

4.9 Das Wachstumsverhalten von Funktionen

Die Groß-O-Notation wurde von D. E. Knuth in der Algorithmenanalyse eingeführt. Sie wurde ursprünglich von Paul Bachmann (1837–1920) entwickelt und von Edmund Landau (1877–1938) in seinen Arbeiten verbreitet.

Definition 39 (Groß-O-Notation)

- $f(n) \in \mathcal{O}\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0,\ n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$(\forall n \geq n_0) \quad \big[|f(n)| \leq c \cdot g(n)\big]$$
„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht schneller als g"
- $f(n) \in o\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\ c > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$(\forall n \geq n_0) \quad \big[|f(n)| < c \cdot g(n)\big]$$
„f wächst echt langsamer als g"

- $f(n) \in \Omega\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0,\ n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0)\ \big[|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0\big]$$

„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht langsamer als g"

- $f(n) \in \omega\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\ c > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0)\ \big[|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\big]$$

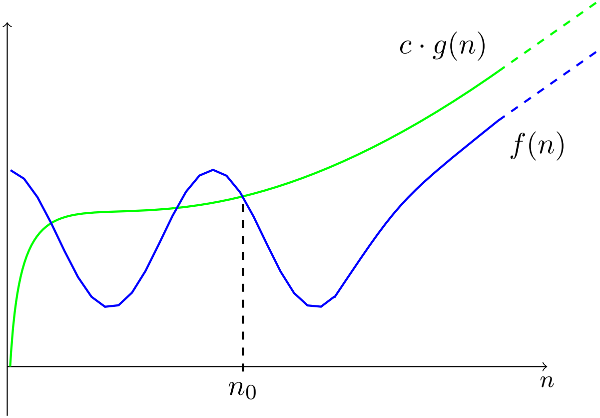
„f wächst echt schneller als g"

- $f(n) \in \Theta\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn

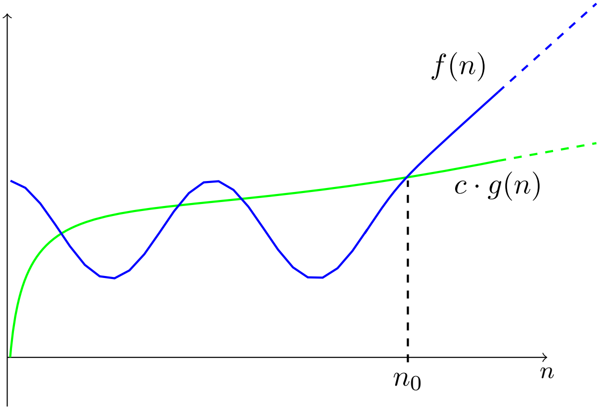
$$f(n) \in \mathcal{O}\big(g(n)\big) \text{ und } f(n) \in \Omega\big(g(n)\big)$$

„f wächst (bis auf konstante Faktoren) genauso schnell wie g"

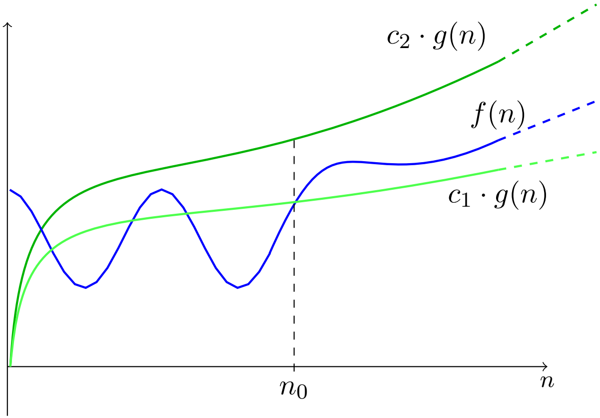
Graphische Darstellung von $\mathcal{O}$



Graphische Darstellung von ω



Graphische Darstellung von Θ



- $f(n) \in \Omega_\infty(g(n))$ genau dann, wenn $\exists\ c > 0$, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0\,.$$

- $f(n) \in \omega_\infty(g(n))$ genau dann, wenn $\forall\ c > 0\ \exists$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\,.$$

Bemerkungen:

1. Man schreibt oft, aber logisch unsauber $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$.
2. Oft werden nur Funktionen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ betrachtet (oder $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$); dann sind die Absolutbeträge überflüssig.
3. Manchmal werden auch Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder das Verhalten für $x \to a$ betrachtet.
4. Achtung: Die Notation für Ω und Ω_∞ ist in der Literatur nicht eindeutig; im Zweifelsfall muss auf die jeweilige Definition geachtet werden!

Rechenzeit in Abhängigkeit von der Problemgröße

Problemgröße	Zeitbedarf					
n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	2^n	$n!$
10	3×10^{-9} s	10^{-8} s	3×10^{-8} s	10^{-7} s	10^{-6} s	3×10^{-3} s
10^2	7×10^{-9} s	10^{-7} s	7×10^{-7} s	10^{-5} s	4×10^{13} yr	*
10^3	$1,0 \times 10^{-8}$ s	10^{-6} s	1×10^{-5} s	10^{-3} s	*	*
10^4	$1,3 \times 10^{-8}$ s	10^{-5} s	1×10^{-4} s	10^{-1} s	*	*
10^5	$1,7 \times 10^{-8}$ s	10^{-4} s	2×10^{-3} s	10 s	*	*
10^6	2×10^{-8} s	10^{-3} s	2×10^{-2} s	17 min	*	*

Annahme: eine Operation dauert 10^{-9} Sekunden, $\log n = \log_2 n$

Bezeichnung von Wachstums-Größenordnungen

$o(1)$	konvergiert gegen 0
$\mathcal{O}(1)$	beschränkt durch Konstante
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmische Funktion
$\mathcal{O}(\log^k n)$	polylogarithmische Funktion
$\mathcal{O}(n)$	linear beschränkte Funktion
$\bigcup_{k\geq 0} \mathcal{O}(n^k)$	polynomiell beschränkte Funktion
$\bigcup_{c>0} \Omega(2^{cn})$	(mindestens) exponentielle Funktion