Beispiel 210

Es ist

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}} \, ,$$

wie wir aus der in Abschnitt 4 (Folie 277) hergeleiteten Formel sehen, wenn wir bedenken, dass diese Formel (zunächst) für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, die obige Gleichung also eine polynomielle Identität darstellt.

Beispiel (Forts.)

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \left(\sum x^m\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\sum \left(\sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\right)\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left(S_{m,k} \cdot \sum x^{\underline{k}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left(S_{m,k} \cdot \frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{\underline{k+1}} \,.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

Lemma 211 (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum(f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum((Eg) \cdot \Delta f)\ .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \\
&\quad \underbrace{-f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x)\ .
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung zur Notation:

Bei der Darstellung

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f)$$

ist zu beachten, dass die diskrete Stammfunktion nur bis auf additive Konstanten bestimmt ist, links und rechts also eigentlich Klassen von Funktionen stehen (wie bei den Landau-Symbolen).

Beispiel 212

Berechne

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta\binom{x}{m+1} &= \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} \\
&= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m} .
\end{aligned}$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:

Beispiel (Forts.)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}\cdot H_k &= \left(\sum\left(\binom{x}{m}\cdot H_x\right)\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1}\\
&= \left(H_x\cdot\binom{x}{m+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1} - \sum\left(\binom{x+1}{m+1}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1}\\
&= \left(H_x\cdot\binom{x}{m+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1}\cdot\sum\binom{x}{m}\Bigg|_{x=1}^{n+1}\\
&= \left(H_x\cdot\binom{x}{m+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1}\cdot\binom{x}{m+1}\Bigg|_{x=1}^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{m+1}\cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1}\cdot H_1\\
&\quad - \left(\frac{1}{m+1}\binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1}\binom{1}{m+1}\right)\\
&= \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) + 0\,.
\end{aligned}$$

Lemma 213 (Newton-Darstellung von Polynomen)

Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \cdot x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \binom{x}{k} .$$

Bemerkung: Die Newton-Darstellung entspricht offensichtlich der Taylorreihenentwicklung im differenzierbaren Fall.

Beweis:

$f(x)$ kann als Polynom vom Grad n eindeutig in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^{\underline{k}}$$

geschrieben werden ($x^{\underline{k}}$ ist Basis!). Damit ist nach Lemma 203 (1)

$$\Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot k^{\underline{i}} \cdot x^{\underline{k-i}} \,.$$

Also gilt, dass

$$\Delta^i f(0) = b_i \cdot i! \quad \text{bzw.} \quad b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \,.$$

$\square$

Beispiel 214

Wir haben in Beispiel 210 gesehen, dass

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} \cdot x^{\underline{i}} \,.$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} k! \cdot S_{n,k} &= \Delta^k x^n\big|_{x=0} = (E-I)^k x^n\big|_{x=0} \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i\Big) x^n\big|_{x=0} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \,, \end{aligned}$$

und damit auch

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \,.$$

4.9 Inversion

4.9.1 Basisfolgen

Definition 215

Eine Folge $(p_0(x), p_1(x), \ldots)$ von Polynomen $p_i(x)$ heißt Basisfolge, falls

$$\deg(p_i) = i \qquad \text{für alle } i.$$

Bemerkung: $p_0 \neq 0$, da wir für $p(x) \equiv 0$ festlegen: $\deg(p) = -1$.

Beobachtung: $(p_i(x))_{i \geq 0}$ sei eine Basisfolge. Dann kann jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n eindeutig dargestellt werden als

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot p_i(x)$$

mit $f_i \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Mit Koeffizientenvergleich und vollständiger Induktion. $\square$

4.9.2 Zusammenhangskoeffizienten

Seien $\big(p_i(x)\big)_{i\geq 0}$ und $\big(q_i(x)\big)_{i\geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten Zusammenhangskoeffizienten), so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1. $$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot p_k(x)$$

2. $$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot q_k(x)$$

Lemma 216

Seien die $a_{n,k}, b_{n,k}$ wie oben, $A = (a_{ij})_{0\le i,j\le n}$ und $B = (b_{ij})_{0\le i,j\le n}$, dann ist

$$AB = I$$

(I ist die $n+1$-dimensionale Einheitsmatrix.)

Beweis:

Klar. $\square$

Satz 217

Seien $a_{n,k}$ und $b_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, die zu zwei Basisfolgen gehörenden Zusammenhangskoeffizienten. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot u_k\right] \text{ gdw } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot v_k\right]$$

Beweis:

In Matrixschreibweise gilt:

$$v = (v_0, \ldots, v_n)^T = A \cdot u \text{ und } u = B \cdot v$$

Klar, da $A = B^{-1}$. □

4.9.3 Die Binomialinversion

Der Binomialsatz ergibt:

$$
\begin{aligned}
x^n = \big((x-1)+1\big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (x-1)^k \\
(x-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot x^k
\end{aligned}
$$

Betrachte die beiden Basisfolgen

$(v_k)_{k\geq 0} := (x^k)_{k\geq 0}$ und $(u_k)_{k\geq 0} := ((x-1)^k)_{k\geq 0}$.

Satz 217 liefert:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u_k\right] \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot v_k\right]$$

Für „Puristen“: Ersetze u_n durch $(-1)^n \cdot u_n$. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot u_k\right] \text{ und}$$
$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot v_k\right]$$

Beispiel 218

Sei $d(n,k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n,0)\ .$$

(Die Anzahl der sog. derangements).

$$n! = \sum_{k=0}^{n} d(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \stackrel{k \mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

Beispiel (Forts.)

Mit der Binomialinversion gilt:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \frac{n^{\underline{k}}}{n!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e} \,.$$

4.9.4 Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n\geq 0}$ und $(x^{\underline{n}})_{n\geq 0}$. Wie wir bereits gesehen haben, gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}}$$
$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k$$

Daraus lässt sich die Stirling-Inversion ableiten:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot u_k\right] \text{ gdw } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k\right]$$

4.10 Erzeugende Funktionen

Definition 219

Zu einer Folge $(a_i)_{i\geq 0}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige (gewöhnliche) erzeugende Funktion die formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^i \ .$$

Beobachtungen: Die formalen Potenzreihen bilden einen Ring:

$$A(z) \pm B(z) = \sum_{i \geq 0} (a_i \pm b_i) z^i$$
$$c \cdot A(z) = \sum_{i \geq 0} (c \cdot a_i) z^i$$

Hier gilt folgende Produktformel:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n$$

(Konvolution von $A(z)$ und $B(z)$)

Satz 220

Eine formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$$

besitzt ein multiplikatives Inverses genau dann, wenn $a_0 \neq 0$.

Beweis:

Annahme: Sei

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot z^n$$

ein solches Inverses. Dann muss $A(z) \cdot B(z) = 1$ sein, also auch $a_0 \cdot b_0 = 1$, damit $a_0 \neq 0$. Daher muss $b_0 = {a_0}^{-1}$ sein.

Beweis (Forts.):

Seien induktiv $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ bereits bestimmt. Dann folgt aus

$$[z^n]\Big(A(z) \cdot B(z)\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = 0, n \geq 1$$

$\big($dabei bezeichnet $[z^n](\ldots)$ den Koeffizienten von z^n in $(\ldots)\big)$ folgende Formel:

$$b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Also ist b_n und damit per Induktion $B(z)$ eindeutig bestimmt. $\square$

Beispiel 221

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$$

Es gilt $A(z) \cdot (1-z) = 1$, da

$$\begin{aligned} A(z)\cdot(1-z) &= A(z) - z\cdot A(z) \\ &= (1+z+z^2\ldots) - (z+z^2+z^3+\ldots) = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$A(z) = \frac{1}{1-z}$$