WS 2012/13

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/uebung/

7. November 2012

ZÜ III

Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Fragen, Probleme?
   ,,Das Versteh' ich nicht!"

2. Thema: Induktionsbeweise

3. Vorbereitung auf TA Blatt 4:

   Vollständige Induktion (VA 1)
   Grenzwert und Wachstum (VA 2, VA 3)

1. Übungsbetrieb

1.1 Fragen, Probleme?

?

1.2 ,,Das Versteh' ich nicht!"

Falsche Lesetechnik? Lesen und hören Sie strukturiert!

Eine Definition wird zunächst syntaktisch funktional analysiert.

Ein inhaltliches Verständnis entsteht in nachfolgenden Schritten.

2. Thema

2.1 Induktionsbeweis

Mit einem Induktionsbeweis beweist man den Wahrheitswert einer aufgezählten Menge von Aussagen

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

durch eine Aufzählung der Beweise B_i für die Aussagen A_i

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots .$$

Man beweist dabei die erste der Aussagen,
d.h. A_1, und eine Folgerung $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ für beliebiges $n \geq 1$.

Daraus ergibt sich dann eine Aufzählung der Beweise B_i.

Man beachte:

Die Variable n bedeutet lediglich den Index in der Aufzählung der Aussagen A_n bzw. Beweise B_n.

Selbstverständlich beginnt der Index einer Aufzählung bei 1 und ist aufsteigend unendlich.

Die Aussagen A_n haben stets die Form

Es gilt $P(n)$.

Dabei ist $P(n)$ ein Prädikat, das sich auf den Index n bezieht.

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen.

Die Gültigkeit einer Formel

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n)] \tag{1}$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen, heißt,

anstatt (1) die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \quad \wedge \quad (\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]\,. \tag{2}$$

Bemerkung: Das Prädikat $P(n)$ ist nicht identisch mit der Aussage, die man beweisen will. Die Frage der Anpassung des Schemas an z.B. absteigende Folgen ganzer Zahlen oder den Induktionsanfang stellt sich nicht.

Die Anpassung geschieht stets durch

Wahl eines geeigneten Prädikats.

Beim Beweis der Formel (2) geht man wie folgt vor.

Induktionsanfang : Es gilt $P(1)$:

...

Induktionsschritt : Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$.

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme : Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss : Dann gilt $P(n+1)$:

...

Soweit das Schema des Induktionsbeweises.

3. Vorbereitung auf Tutorübungen Blatt 4

3.1 VA 1, Induktion

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$
die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1 + x)^m \,.$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an
und führen Sie den Induktionsbeweis
für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$
nach dem angegebenen Schema durch.

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$.

Wir definieren das Prädikat $P(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $P(n)$ genau dann wahr ist, wenn $1 + (n-1)x \leq (1+x)^{n-1}$ gilt, i.Z.

$$P(n) \quad :\Longleftrightarrow \quad 1 + (n-1)x \leq (1+x)^{n-1}\,.$$

Dann haben wir zu zeigen

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n)]\,.$$

Induktionsanfang: Es gilt $P(1)$:
$P(1)$ bedeutet
$1 + 0 \cdot x \leq (1+x)^0$, d. h. $1 \leq 1$.
Also gilt $P(1)$.

Induktionsschritt: Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$.

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss: Es gilt $P(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= (1+x)^{n-1}(1+x) \\
&\geq (1+(n-1)x)(1+x) \qquad \text{I.A. } P(n) \\
&= 1+(n-1)x+x+(n-1)x^2 \\
&\geq 1+nx\,. \qquad \text{w.z.b.w.}
\end{aligned}
$$

3.2 VA 2, Grenzwert und Wachstum

VA 2.1

Im Folgenden bezeichnet 1 in $o(1)$ die konstante Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert 1 besitzt.

2. Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Wachstums $o(f(n))$:

$$\frac{1}{n+1} \in o(1)\,.$$

Lösung:

Sei $f(n) = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann haben wir zu zeigen

$$(\forall c > 0 \; \exists n_c \in \mathbb{N}_0 \; \forall n \geq n_c) \; \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right].$$

Wir erfüllen

schrittweise den obigen prädikatenlogischen Ausdruck
von „links nach rechts“ gemäß der Klammerung

$$\forall c > 0 \; \left[\exists n_c \in \mathbb{N}_0 \; \left[\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right] \right] \right].$$

Als Erstes nehmen wir ein beliebiges $c > 0$ an.

Für dieses $c > 0$ ist Folgendes nachzuweisen.

$$\exists n_c \in \mathbb{N}_0 \ \left[\forall n \geq n_c \left[\left|\frac{1}{n+1}\right| < c \cdot 1\right]\right] .$$

Den Existenzbeweis führen wir wieder konstruktiv.
Wir konstruieren ein geeignetes n_c wie folgt:

$$n_c := \left\lceil \frac{1}{c} \right\rceil + 17.$$

Nun müssen wir zeigen, dass gilt

$$\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right] .$$

Wir nehmen ein beliebiges n mit $n \geq n_c$ an und haben zu zeigen:

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 .$$

Wegen $n \geq n_c = \lceil \frac{1}{c} \rceil + 17$ gilt $n > \frac{1}{c}$, mithin $\frac{1}{n} < c$.

Es folgt

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < c \cdot 1 .$$

W.z.b.w.

VA 2.2

3. Man zeige: Für reellwertige Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1)\,.$$

Lösung:

Tatsächlich müssen wir im Wesentlichen nur einige Bezeichnungen ersetzen.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad &\iff \quad (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0\ \forall n \geq n_\varepsilon)\ \ [|f(n) - 0| < \varepsilon] \\
&\iff \quad (\forall c > 0\ \exists n_c \in \mathbb{N}_0\ \forall n \geq n_c)\ \ [|f(n)| < c \cdot 1] \\
&\iff \quad f(n) \in o(1)\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung:
Obiger Beweis ist ein Beispiel für äquivalente Umformung anstelle einer schrittweisen Auflösung der prädikatenlogischen Formel.

3.3 VA 3, Wachstum von Funktionen

1. Man zeige:
$$(\log n^2)^2 \in o(2^{\ln n})\,.$$

$\log$ ohne Angabe der Basis bedeutet, dass die Formel für alle zulässigen Basen zu beweisen ist.

Lösung:

Es ist zu zeigen:

$$(\forall c > 0\ \exists n_c \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_c)\ \left[|(\log n^2)^2| < c \cdot 2^{\ln n} \right].$$

Sei b eine beliebige zulässige Basis.

Wir lösen die Formel schrittweise auf.

Sei c eine beliebige reelle Zahl mit $c > 0$.
Nun konstruieren wir ein natürliche Zahl n_c, so dass gilt

$$(\forall n \geq n_c)\left[(\log n^2)^2 < c \cdot 2^{\ln n}\right].$$

Umformung:

$$(\log_b n^2)^2 = \frac{4}{(\ln b)^2} \cdot (\ln n)^2 < c \cdot 2^{\ln n}.$$

Wir bezeichnen $\ln n$ mit x,
d.h. wir setzen $x = \ln n$,
und wir setzen $k = \frac{4}{(\ln b)^2}$.

Nun benutzen wir die Ungleichung $x^3 < 2^x$ für $x \geq 10$.

Die Ungleichung folgt leicht aus $3 \ln x < x \ln 2$ für $x \geq 10$.

Dann gilt für $x \geq 10$ und $\frac{k}{x} \leq c$

$$k \cdot x^2 = \frac{k}{x} \cdot x^3 < c \cdot 2^x \, .$$

Nun setzen wir $x_c = \max\{10, \frac{k}{c}\}$ und $n_c = \lceil e^{x_c} \rceil$

und erhalten für alle $n \geq n_c$ die gewünschte Ungleichung.

3. Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.
   Man zeige $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$.

Lösung:

Es ist zu zeigen

$$(\exists c > 0\ \exists n_c \in \mathbb{N}\ \forall x \geq n_c)\,[|f(x)| \leq c \cdot x^n]\,.$$

Es gelten für alle $x \geq 1$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left|\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot x^i \\ &\leq x^n \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot x^{i-n}\right) \leq x^n \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} |a_i|}_{=:c} \end{aligned}$$

Wir können beispielsweise $c = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ und $n_c = 2$ setzen.