

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die prädikatenlogische Formel $F = (\exists x)[(\neg\exists y)[P(x, y)]] \wedge (\forall u\exists v)[P(u, v)]$ ist erfüllbar.
2. $\sqrt{n} \in \Omega(\ln(n^{\ln n}))$.
3. Seien $p, q \in S_4$ mit $p = (1\ 2)(3)(4)$ und $q = (1\ 2)(3\ 4)$. Dann ist die kleinste Untergruppe, die p und q enthält, kommutativ.
4. Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ mit $f_n = 2n \cdot 3^n + 1$ erfüllt die folgende Rekursionsgleichung:

$$f_{n+3} - 7f_{n+2} + 15f_{n+1} - 9f_n = 0.$$

Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung einer Teilaufgabe gibt es jeweils einen halben Punkt, und im Fall von Teilaufgabe 4 je einen ganzen Punkt.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei X eine nicht leere Menge. Der Operator Δ auf Paaren von Teilmengen $A, B \subseteq X$ ist definiert als die Symmetrische Differenz von A und B , i.Z. $A\Delta B$, d.h. es gilt $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Bekanntlich bildet die Algebra $S = (\mathcal{P}(X), \Delta)$ eine kommutative Gruppe, in der die leere Menge $\emptyset \subseteq X$ das neutrale Element darstellt.

1. Zeigen Sie, dass für alle $A, B \subseteq X$ gilt: $(A\Delta B)\Delta B = A$.
2. Zeigen Sie, dass für alle $A, B, C \subseteq X$ gilt:

$$(A\Delta B)\Delta \overline{C} = \overline{A}\Delta(B\Delta C).$$

3. Es bezeichne Δ die Boolesche Funktion $x\Delta y := (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$ für die aussagenlogischen Variablen x, y . Bestimmen Sie nun die (vollständige) konjunktive Normalform des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks mit aussagenlogischen Variablen a, b, c :

$$(a \Delta b) \Delta (\neg c).$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^4$, d. h. $p(x) = P_{\vec{a}}(x)$, wobei a_j Koeffizient von x^j ist.

Seien $\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$ und $a_j = \omega^{3-j}$ (d. h. $\vec{a} = (-i, -1, i, 1)$).

1. Bestimmen Sie $P_{\vec{a}}(1)$!
2. Bestimmen Sie $\mathcal{F}_{2,\omega^2}(\vec{a}_g)$ und $\mathcal{F}_{2,\omega^2}(\vec{a}_u)$!
3. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}_{4,\omega}(\vec{a}) = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ durch Ausführung des Divide-and-Conquer Algorithmus $\text{DFT}(\vec{a}, \omega)$!

Sie dürfen die Ergebnisse aus Teilaufgabe 2 benützen.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Wir betrachten den 3-dimensionalen Hyperwürfel $Q_3 = (V, E)$ mit $V = \{0, 1\}^3$ und $E = \{\{v, w\}; v, w \in V, \text{Hamming-Abstand}(v, w) = 1\}$. (Beispiele:

Hamming-Abstand($(0, 1, 0), (0, 0, 0)$) = 1, Hamming-Abstand($(0, 1, 0), (1, 0, 0)$) = 2.)

Wir interpretieren die Knoten als Dualzahldarstellung natürlicher Zahlen und identifizieren die Knoten mit den dargestellten natürlichen Zahlen aus $\{0, 1, 2, \dots, 7\}$.

1. Zeigen Sie, dass jeder nicht leere 3-reguläre Graph G eine gerade Zahl von Knoten besitzt!
2. Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Zeichnung, dass Q_3 bipartit und planar ist!
3. Wir definieren eine binäre Relation R über der Knotenmenge V von Q_3 wie folgt:

$$(x, y) \in R \iff x = y \vee \{x, y\} \in E.$$

Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm der transitiven Hülle von R ! Beachten Sie dabei die Symmetrie von R (d.h., R^+ ist nicht notwendig kreisfrei)!

Ist $S = R \circ R$ transitiv? Beweisen Sie die Gültigkeit Ihrer Aussage!

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei $q(x) = x^6 + 2x^3 + 1$ ein Polynom aus $\mathbb{Z}_5[x]$.

Wir betrachten den Restklassenring $R = (\mathbb{Z}_5[x]_{6, +_q, \cdot_q})$. Seine Elemente werden repräsentiert durch die Reste bei Polynomdivision von Polynomen p durch q .

Sei $t(x) = x^3 \in R$.

1. Wie viele Elemente enthält R ?
 2. Ist R ein Körper? Beweisen Sie Ihre Aussage!
 3. Berechnen Sie ein Polynom $s \in R$, so dass $t^2 \equiv s \pmod{q}$.
 4. Berechnen Sie, insbesondere durch Anwendung des Euklidischen Algorithmus, das multiplikative Inverse r von t , so dass also $r \cdot_q t = 1$ gilt.
-

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Seien $k, r \in \mathbb{N}$. Wir nennen einen Graph $G = (V, E)$ mit Knoten $V = [n] \subseteq \mathbb{N}$ einen k -Stern mit Radius r , falls $|V| = k \cdot r + 1$, und

$$E = \{\{x, y\}; (1 < x) \wedge (y = x + k)\} \cup \{\{1, x\}; 1 < x \leq 1 + k\}.$$

1. Sei G ein k -Stern mit Radius r .
 - (a) Zeigen Sie, dass G ein Baum ist!
 - (b) Geben Sie die Anzahl von Knoten eines längsten einfachen Pfades in G an!
 2. Sei G ein 6-Stern mit Radius 3. Bestimmen Sie den Prüfer-Code von G !
 3. Geben Sie eine graphische Darstellung des Baumes mit Prüfer-Code (5,6,7,8,9,9,9) an!
-

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Sei Δ der Differenzenoperator für komplexwertige Funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Man beachte die Schreibweise $x^{\bar{n}}$ für steigende Potenzen (steigende Fakultät) von x .

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=0}^n (k+1) \cdot 2^{\bar{k}} = 2^{\overline{n+1}} - 1, \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

2. Sei $g(n) = 2^{\bar{n}}$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(\Delta g)(n) = (n+1) \cdot 2^{\bar{n}}.$$

3. Sei $f(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^n f(k) \cdot (k+1) \cdot 2^{\bar{k}}.$$

Sie dürfen die Ergebnisse der Teilaufgaben 1 und 2 benutzen.

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Seien $k, l \in \mathbb{N}$. Wir betrachten k nicht unterscheidbare Kupfer-Münzen und l nicht unterscheidbare Silber-Münzen.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sämtliche der $k+l$ Münzen auf zwei unterscheidbare Kassen A bzw. B zu verteilen?
 2. Sei l ungerade. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sämtliche der $k+l$ Münzen auf zwei nicht unterscheidbare Kassen zu verteilen?
Wenden Sie Ihre Formel auf den Fall $k = 2$ und $l = 3$ an!
 3. Sei $k = 6$. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sämtliche 6 Kupfer-Münzen auf 3 nicht unterscheidbare Kassen zu verteilen?
-