Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 5
12. Mai 2014

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 21. Mai 2014, 10 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Ein Kartenstapel mit 27 Karten enthalte genau einen Joker. Zwei Personen A und B ziehen nach dem folgenden 3-schrittigen Verfahren letztendlich genau eine Karte aus dem Stapel.

   Wir starten das folgende Verfahren mit $x = 27$ Karten und wiederholen es so lange, bis nur mehr eine Karte auf dem Tisch liegt.

   - A teilt die x Karten in zufälliger Weise in einen linken, rechten und mittleren Stapel mit je $\frac{x}{3}$ verdeckten Karten. Dann entfernt B den linken Stapel. Nun sieht A in den verbleibenden 2 Stapeln nach und entfernt einen Stapel, der den Joker nicht enthält. Nun liegt noch ein einziger Stapel mit $\frac{x}{3}$ Karten auf dem Tisch.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt am Ende ein Joker auf dem Tisch, wenn wir Laplace-Wahrscheinlichkeiten voraussetzen? (Ergebnis als Bruchzahl angeben!)

2. Wir nehmen an, dass sich unter verschiedenen 27 Karten genau 3 Joker befinden. Eine Person A wählt davon Laplace-zufällig 5 Karten aus und gibt diese einer Person B in die Hand.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat B mindestens 2 Joker in ihrer Hand?

   (Zur Darstellung des Ergebnisses dürfen bekannte Funktionen der Kombinatorik unausgewertet verwendet werden.)

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Es liegen eine 5-Pfennig-, eine 10-Pfennig- und eine 50-Pfennig-Münze jeweils mit der Rückseite nach oben auf dem Tisch. Wir betrachten einen Zufallsprozess, der in jedem Schritt die Seiten einer Laplace-zufällig aus den 3 Münzen ausgewählten Münze wendet.

Es sei X diejenige diskrete Zufallsvariable, die die Anzahl der Schritte (≥ 1) zählt, bis zum ersten Mal alle Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegen.
(Offenbar gilt beispielsweise $\Pr[X=1] = 0$.)

1. Bestimmen Sie $\Pr[X=3]$ (mit Begründung)!

2. Bestimmen Sie $\Pr[X=n]$ für gerades n (mit Begründung)!

3. Nehmen Sie an, dass genau eine der 3 Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegt, während also die anderen beiden Münzen mit der Rückseite nach oben liegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass nach 2 Schritten wiederum genau eine der Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegt?

4. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_X.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Sei $Y(\omega) = (X(\omega) \mod 2)$ für alle $\omega \in \Omega$.

1. Geben Sie W_X und W_Y an.

2. Berechnen Sie $\Pr[Y = 0]$.

3. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_Y für $p = \frac{1}{3}$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir wählen nacheinander Laplace-zufällig und unabhängig Buchstaben aus der 6-elementigen Multimenge der Buchstabenvorkommen des Wortes `ARARAT` aus. Wir legen dabei jeden Buchstaben wieder zurück, der nicht `A` ist, und legen aber ein gewähltes `A` <u>nicht</u> wieder zurück. Wir definieren die Zufallsvariable X wie folgt.

$X :=$ Anzahl der Züge, bis alle `A` gezogen wurden.

1. Geben Sie dabei die Zufallsvariable X als Abbildung einer geeigneten Ergebnismenge Ω eines entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ an.

2. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

Zusatzaufgabe 2 (wird nicht korrigiert)

Mit einer Münze, die bei einem Wurf mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ Kopf zeigt, wird genau so lange geworfen, bis Kopf und Zahl das erste Mal mindestens zweimal vorgekommen sind. Der Wert der Zufallsvariablen X sei durch die Anzahl der Würfe bestimmt.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ approximativ!

Hinweis: Diese Aufgabe gehört zu den schwierigeren Aufgaben und kann deshalb durchaus zeitaufwändig sein. Wir werden sehr gute Lösungen prämieren.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

X sei Poisson-verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[(X+1)^{-1}]$.

Vorbereitung 2

Eine Firma stellt Kuchen mit Rosinen her. Hierfür werden $\lambda \cdot N$ Rosinen in den Teig für N Kuchen gegeben, woraufhin die ganze Masse so gut durchmischt wird, dass wir annehmen können, dass jede einzelne Rosine mit derselben Wahrscheinlichkeit in einem der Kuchen landet. N ist unbekannt und groß.

Wie groß muss die durchschnittliche Zahl λ von Rosinen pro Kuchen sein, wenn höchstens durchschnittlich jeder hundertste Kuchen keine Rosinen enthalten darf?

Vorbereitung 3

Zwei Arbeiter A und B kontrollieren unabhängig eine Tagesproduktion. A und B protokollieren k_1 bzw. k_2 tatsächliche Fehler. Es sei n die Anzahl der tatsächlich aufgetretenen Produktionsfehler. Wir nehmen an, dass die Arbeiter jeden der n Fehler mit Wahrscheinlichkeit p_1 bzw. p_2 registriert haben.

Es seien X_1 bzw. X_2 die Zufallsvariablen, die die Anzahl der von Arbeiter A bzw. B gefundenen Fehler angeben. Wie sind die X_i verteilt? Für welche Werte von n gilt

$$\Pr[|\frac{1}{n}X_i - p_i| \geq 0.1] \leq 0.01\,?$$

Tutoraufgabe 1

1. Ein Geigerzähler registriert mit Wahrscheinlichkeit 10^{-4} ein von einer Quelle Q emittiertes Teilchen. Wenn Q 30 000 Teilchen emittiert, wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler kein Teilchen registriert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 2 Teilchen registriert?

2. Beweisen Sie (analog zum Beweis der Chernoff-Schranken in der Vorlesung), dass die Chernoff-Schranke auch für Poisson-verteilte Zufallsvariablen gilt.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten ein Chamäleon, das in den nächsten 10 Stunden 500 Insekten fangen muss, um seinen Kalorienbedarf zu decken. Pro Stunde passieren das Chamäleon in Reichweite genau 100 Insekten, davon sind 60 klein und werden mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{6}$ gefangen. Die anderen 40 sind groß und können mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ gefangen werden.

Sei Z die Zufallsvariable der Anzahl der in den nächsten 10 Stunden gefangenen Insekten. Schätzen Sie jeweils mit den Ungleichungen nach Markov, Chebyshev und Chernoff die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Z \geq 500]$ ab, mit der das Chamäleon <u>nicht</u> verhungert.

Tutoraufgabe 3

Wir starten mit einem Euro Kapital $K_0 = 1$ und spielen folgendes Spiel mit einer fairen Münze: Wir setzen jedes Mal die Hälfte unseres Kapitals und werfen die Münze. Fällt Kopf, verlieren wir den Einsatz. Fällt Zahl, erhalten wir unseren Einsatz zurück und zusätzlich 4/3 des Einsatzes als Gewinn.

1. Welchen Gewinn X_n erwarten wir bei n Würfen?

   Gegen welchen Grenzwert strebt der erwartete Gewinn $\mathbb{E}[X_n]$ für $n \to \infty$?

2. Das Kapital K_n sei gegeben durch $K_n = X_n + 1$. Es sei $Y_n = K_n/K_{n-1}$ mit (logarithmischem) Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[\ln Y_n]$. Zeigen Sie, dass $K_n \leq \exp(\mu n/2)$ gilt mit einer für wachsendes n gegen 1 strebenden Wahrscheinlichkeit, d. h.

   $$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\frac{\ln(K_n)}{n} \leq \frac{\mu}{2}\right] = 1\,.$$

   <u>Hinweis</u>: Nutzen Sie das Gesetz der großen Zahlen.

3. Interpretieren Sie die Ergebnisse! Erklären Sie insbesondere den scheinbaren Widerspruch eines erwarteten unendlichen Gewinns und der Wahrscheinlichkeit, dass das Kapital gegen 0 strebt!