Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Teil 1

Dennis, Kraft   Richard, Stotz

9. Juli 2015

Hinweise

Termine:

- Heute: DWT Zentralübung 14:00 - 15:00 Uhr
  THEO Zentralübung 15:15 - 16:45 Uhr
- Do, 16.7: DWT Zentralübung 14:15 - 15:45 Uhr
  THEO Vorlesung 16:00 - 17:30 Uhr

Hinweise

Termine:

- Heute: DWT Zentralübung 14:00 - 15:00 Uhr
  THEO Zentralübung 15:15 - 16:45 Uhr
- Do, 16.7: DWT Zentralübung 14:15 - 15:45 Uhr
  THEO Vorlesung 16:00 - 17:30 Uhr

Inhalt:

- Wir besprechen beispielhaft die DWT-Klausur Sommer 2012
- **Unsere Klausur kann sich (stark) in Struktur und Themenschwerpunkt unterscheiden!**

Hinweise

Termine:

- Heute: DWT Zentralübung 14:00 - 15:00 Uhr
  THEO Zentralübung 15:15 - 16:45 Uhr
- Do, 16.7: DWT Zentralübung 14:15 - 15:45 Uhr
  THEO Vorlesung 16:00 - 17:30 Uhr

Inhalt:

- Wir besprechen beispielhaft die DWT-Klausur Sommer 2012
- **Unsere Klausur kann sich (stark) in Struktur und Themenschwerpunkt unterscheiden!**

Klausurtermin: 4. August 11-13 Uhr

Aufgabe 1

Sie werfen eine faire Münze n-mal, mit $n > 0$, und erhalten so ein Wort $w = w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n$ aus $\{K, Z\}^n$.

Aufgabe 1.1

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n die Wahrscheinlichkeit, mit der w ein Palindrom ist. Es soll also gelten, dass

$$w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n = w_n w_{n-1} \dots w_2 w_1.$$

Aufgabe 1

Zunächst bestimmen wir den diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$.

Aufgabe 1

Zunächst bestimmen wir den diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$.

- Die Ergebnismenge ist gegeben durch $\Omega = \{K, Z\}^n$.

Aufgabe 1

Zunächst bestimmen wir den diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$.

- Die Ergebnismenge ist gegeben durch $\Omega = \{K, Z\}^n$.
- Aus der Unabhängigkeit der einzelnen Würfe und der Fairness der Münze folgt $\Pr[w] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Aufgabe 1

Zunächst bestimmen wir den diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$.

- Die Ergebnismenge ist gegeben durch $\Omega = \{K, Z\}^n$.
- Aus der Unabhängigkeit der einzelnen Würfe und der Fairness der Münze folgt $\Pr[w] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Bei $(\Omega, \Pr)$ handelt es sich also ein Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum.

Aufgabe 1

Sei $E \subseteq \{K, Z\}^n$ nun die Menge der Palindrome. Nach dem Prinzip von Laplace gilt

$$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Aufgabe 1

Sei $E \subseteq \{K, Z\}^n$ nun die Menge der Palindrome. Nach dem Prinzip von Laplace gilt

$$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

- Ist n gerade, mit $n = 2k$, so lassen sich die ersten k Stellen von w frei wählen, während die verbleibenden Stellen festgelegt sind. Es gilt also $|E| = 2^k$ und

$$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2^k}{2^n} = \frac{2^k}{2^{2k}} = \frac{1}{2^k}.$$

Aufgabe 1

Sei $E \subseteq \{K, Z\}^n$ nun die Menge der Palindrome. Nach dem Prinzip von Laplace gilt

$$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

- Ist n gerade, mit $n = 2k$, so lassen sich die ersten k Stellen von w frei wählen, während die verbleibenden Stellen festgelegt sind. Es gilt also $|E| = 2^k$ und

$$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2^k}{2^n} = \frac{2^k}{2^{2k}} = \frac{1}{2^k}.$$

- Ist n ungerade, mit $n = 2k + 1$, so lassen sich die ersten $k + 1$ Stellen frei wählen. Es gilt nunmehr $|E| = 2^{k+1}$ und

$$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2^{k+1}}{2^n} = \frac{2^{k+1}}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Aufgabe 1

Sie werfen eine faire Münze n-mal, mit $n > 0$, und erhalten so ein Wort $w = w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n$ aus $\{K, Z\}^n$.

Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n die Wahrscheinlichkeit, mit der sich innerhalb von w eine nicht leere Teilsequenz $v \in \{K, Z\}^+$ wiederholt. Es sollen also Wörter $x, y, z \in \{K, Z\}^*$ existieren, so dass

$$w = xvyvz.$$

Aufgabe 1

Sei $F \subseteq \{K, Z\}^n$ die Menge der Wörter, in denen sich eine nicht leere Teilsequenz wiederholt.

Aufgabe 1

Sei $F \subseteq \{K, Z\}^n$ die Menge der Wörter, in denen sich eine nicht leere Teilsequenz wiederholt.

- Für $n = 1$ gilt $\Omega = \{K, Z\}$ und $F = \emptyset$, woraus folgt
$$\Pr[F] = \Pr[\emptyset] = 0.$$

Aufgabe 1

Sei $F \subseteq \{K, Z\}^n$ die Menge der Wörter, in denen sich eine nicht leere Teilsequenz wiederholt.

- Für $n = 1$ gilt $\Omega = \{K, Z\}$ und $F = \emptyset$, woraus folgt
$$\Pr[F] = \Pr[\emptyset] = 0.$$
- Für $n = 2$ gilt $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$ und $F = \{KK, ZZ\}$. Aus dem Prinzip von Laplace folgt
$$\Pr[F] = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 1

Sei $F \subseteq \{K, Z\}^n$ die Menge der Wörter, in denen sich eine nicht leere Teilsequenz wiederholt.

- Für $n = 1$ gilt $\Omega = \{K, Z\}$ und $F = \emptyset$, woraus folgt

$$\Pr[F] = \Pr[\emptyset] = 0.$$

- Für $n = 2$ gilt $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$ und $F = \{KK, ZZ\}$. Aus dem Prinzip von Laplace folgt

$$\Pr[F] = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

- Für $n \geq 3$ enthält jedes Wort aus Ω mindestens zwei K oder zwei Z. Betrachten wir K bzw. Z als die gesuchte Teilsequenz folgt $F = \Omega$ und demnach

$$\Pr[F] = \Pr[\Omega] = 1.$$

Aufgabe 1

Sie werfen eine faire Münze n-mal, mit $n > 0$, und erhalten so ein Wort $w = w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n$ aus $\{K, Z\}^n$.

Aufgabe 1.3

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit mit der w weder die Teilsequenz KKK noch ZZZ enthält gegeben ist durch

$$\frac{F_n}{2^{n-1}},$$

wobei es sich bei F_n um die n-te Fibonacci-Zahl handelt, welche rekursive definiert ist durch $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 1

Sei $G_n \in \{K, Z\}^n$ die Menge der Wörter mit Länge n, in denen weder die Teilsequenz KKK noch ZZZ vorkommt. Wir beweisen

$$\Pr[G_n] = \frac{F_n}{2^{n-1}}$$

mittels Vollständiger Induktion über n.

Aufgabe 1

Für dem Induktionsanfang betrachten wir die Startwerte $n = 1$ und $n = 2$.

Aufgabe 1

Für dem Induktionsanfang betrachten wir die Startwerte $n = 1$ und $n = 2$.

- Ist $n = 1$ gilt

$$Pr[G_1] = Pr[\{K, Z\}] = Pr[\{K, Z\}^1] = 1 = \frac{1}{1} = \frac{F_1}{2^{1-1}}.$$

Aufgabe 1

Für dem Induktionsanfang betrachten wir die Startwerte $n = 1$ und $n = 2$.

- Ist $n = 1$ gilt

$$Pr[G_1] = Pr[\{K, Z\}] = Pr[\{K, Z\}^1] = 1 = \frac{1}{1} = \frac{F_1}{2^{1-1}}.$$

- Ist $n = 2$ gilt

$$Pr[G_2] = Pr[\{KK, KZ, ZK, ZZ\}] = Pr[\{K, Z\}^2] = 1 = \frac{2}{2} = \frac{F_2}{2^{2-1}}.$$

Aufgabe 1

Für dem Induktionsanfang betrachten wir die Startwerte $n = 1$ und $n = 2$.

- Ist $n = 1$ gilt

$$Pr[G_1] = Pr[\{K, Z\}] = Pr[\{K, Z\}^1] = 1 = \frac{1}{1} = \frac{F_1}{2^{1-1}}.$$

- Ist $n = 2$ gilt

$$Pr[G_2] = Pr[\{KK, KZ, ZK, ZZ\}] = Pr[\{K, Z\}^2] = 1 = \frac{2}{2} = \frac{F_2}{2^{2-1}}.$$

- Beide Fälle erfüllen also die Gleichung $\Pr[G_n] = \frac{F_n}{2^{n-1}}$ womit der Induktionsanfang bewiesen ist.

Aufgabe 1

Nehmen wir nun an, dass die Induktionshypothese für $n-1$ und $n-2$ mit $n \geq 3$ bereits bewiesen wurde und führen den Induktionsschritt durch.

Aufgabe 1

Nehmen wir nun an, dass die Induktionshypothese für $n-1$ und $n-2$ mit $n \geq 3$ bereits bewiesen wurde und führen den Induktionsschritt durch.

- Sei H die Menge der Wörter w mit Länge n, bei denen die letzten beiden Stellen nicht identisch sind, also $w_{n-1} \neq w_n$.

Aufgabe 1

Nehmen wir nun an, dass die Induktionshypothese für $n-1$ und $n-2$ mit $n \geq 3$ bereits bewiesen wurde und führen den Induktionsschritt durch.

- Sei H die Menge der Wörter w mit Länge n, bei denen die letzten beiden Stellen nicht identisch sind, also $w_{n-1} \neq w_n$.
- Außerdem sei J die Menge der Wörter w mit Länge n, bei denen zwar die letzten beiden Stellen identisch sind, aber $w_{n-2} \neq w_{n-1}$.

Aufgabe 1

Nehmen wir nun an, dass die Induktionshypothese für $n-1$ und $n-2$ mit $n \geq 3$ bereits bewiesen wurde und führen den Induktionsschritt durch.

- Sei H die Menge der Wörter w mit Länge n, bei denen die letzten beiden Stellen nicht identisch sind, also $w_{n-1} \neq w_n$.
- Außerdem sei J die Menge der Wörter w mit Länge n, bei denen zwar die letzten beiden Stellen identisch sind, aber $w_{n-2} \neq w_{n-1}$.
- Ist w in H bzw. in J, dann ist es auch in G_n genau dann falls

$$w_1 w_2 \ldots w_{n-2} w_{n-1} \in G_{n-1} \quad \text{bzw.} \quad w_1 w_2 \ldots w_{n-3} w_{n-2} \in G_{n-2}.$$

Aufgabe 1

Nehmen wir nun an, dass die Induktionshypothese für $n-1$ und $n-2$ mit $n \geq 3$ bereits bewiesen wurde und führen den Induktionsschritt durch.

- Sei H die Menge der Wörter w mit Länge n, bei denen die letzten beiden Stellen nicht identisch sind, also $w_{n-1} \neq w_n$.
- Außerdem sei J die Menge der Wörter w mit Länge n, bei denen zwar die letzten beiden Stellen identisch sind, aber $w_{n-2} \neq w_{n-1}$.
- Ist w in H bzw. in J, dann ist es auch in G_n genau dann falls

$$w_1 w_2 \ldots w_{n-2} w_{n-1} \in G_{n-1} \quad \text{bzw.} \quad w_1 w_2 \ldots w_{n-3} w_{n-2} \in G_{n-2}.$$

- Es gilt also

$$\Pr[G_n \mid H] = \Pr[G_{n-1}] \quad \text{und} \quad \Pr[G_n \mid J] = \Pr[G_{n-2}].$$

Aufgabe 1

- Da das Ereignis H auf die Hälfte der Wörter in Ω zutrifft und J auf ein Viertel, gilt nach Laplace außerdem $\Pr[H] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[J] = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 1

- Da das Ereignis H auf die Hälfte der Wörter in Ω zutrifft und J auf ein Viertel, gilt nach Laplace außerdem $\Pr[H] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[J] = \frac{1}{4}$.
- Des Weiteren sind H und J disjunkt und G_n ist eine Teilmenge von $H \cup J$. Wir können also den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit anwenden und rechnen

$$
\begin{aligned}
\Pr[G_n] &= \Pr[G_n \mid H] \cdot \Pr[H] + \Pr[G_n \mid J] \cdot \Pr[J] \\
&= \Pr[G_{n-1}] \cdot \frac{1}{2} + \Pr[G_{n-2}] \cdot \frac{1}{4} \\
&\overset{\text{I.H.}}{=} \frac{F_{n-1}}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{F_{n-2}}{2^{n-3}} \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{2^{n-1}} = \frac{F_n}{2^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1

- Da das Ereignis H auf die Hälfte der Wörter in Ω zutrifft und J auf ein Viertel, gilt nach Laplace außerdem $\Pr[H] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[J] = \frac{1}{4}$.
- Des Weiteren sind H und J disjunkt und G_n ist eine Teilmenge von $H \cup J$. Wir können also den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit anwenden und rechnen

$$
\begin{aligned}
\Pr[G_n] &= \Pr[G_n \mid H] \cdot \Pr[H] + \Pr[G_n \mid J] \cdot \Pr[J] \\
&= \Pr[G_{n-1}] \cdot \frac{1}{2} + \Pr[G_{n-2}] \cdot \frac{1}{4} \\
&\overset{\text{I.H.}}{=} \frac{F_{n-1}}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{F_{n-2}}{2^{n-3}} \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{2^{n-1}} = \frac{F_n}{2^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

- Der Induktionsschritt ist somit bewiesen.

Spiele mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten unabhängige Zufallsvariablen X, Y, Z mit

- $X \sim \text{Bin}(6, 7/8)$
- $Y \sim \text{Bin}(5, 7/8)$
- $Z \sim \text{Geo}(1/4)$.

Wir definieren außerdem $M := \max\{X + Y, Z\}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die folgenden Werte auf vier Dezimalstellen genau

(a) $\Pr[M > 10]$.

(b) $\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6]$

(c) Bestimmen sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so, dass für $K := \lambda \cdot X + \mu \cdot Z$ sowohl $\mathbb{E}[K] = 0$ als auch $\text{Var}[K] = 1$ gilt.

Spiele mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten unabhängige Zufallsvariablen X, Y, Z mit

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathrm{Bin}(6, 7/8) \\ Y \sim \mathrm{Bin}(5, 7/8) \end{array}\right\} X + Y \sim \mathrm{Bin}(11, 7/8)$$

- $Z \sim \mathrm{Geo}(1/4)$.

Wir definieren außerdem $M := \max\{X + Y, Z\}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die folgenden Werte auf vier Dezimalstellen genau

(a) $\Pr[M > 10]$.

(b) $\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6]$

(c) Bestimmen sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so, dass für $K := \lambda \cdot X + \mu \cdot Z$ sowohl $\mathbb{E}[K] = 0$ als auch $\mathrm{Var}[K] = 1$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 2(a)

$X + Y \sim \text{Bin}(11, 7/8)$, $Z \sim \text{Geo}(1/4)$, $M := \max\{X + Y, Z\}$

Aufgabe 2(a)

Bestimmen Sie $\Pr[M > 10]$

Lösung zu Aufgabe 2(a)

$X + Y \sim \text{Bin}(11, 7/8)$, $Z \sim \text{Geo}(1/4)$, $M := \max\{X + Y, Z\}$

Aufgabe 2(a)

Bestimmen Sie $\Pr[M > 10]$

Beweisskizze.

$$\Pr[M > 10] = 1 - \Pr[X + Y \leq 10] \cdot \Pr[Z \leq 10]$$

Lösung zu Aufgabe 2(a)

$X + Y \sim \mathrm{Bin}(11, 7/8)$, $Z \sim \mathrm{Geo}(1/4)$, $M := \max\{X + Y, Z\}$

Aufgabe 2(a)

Bestimmen Sie $\Pr[M > 10]$

Beweisskizze.

$$\Pr[M > 10] = 1 - \Pr[X + Y \leq 10] \cdot \Pr[Z \leq 10]$$

$$\Pr[X + Y \leq 10] = 1 - \Pr[X + Y = 11] = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{11}$$

Lösung zu Aufgabe 2(a)

$X + Y \sim \text{Bin}(11, 7/8)$, $Z \sim \text{Geo}(1/4)$, $M := \max\{X + Y, Z\}$

Aufgabe 2(a)

Bestimmen Sie $\Pr[M > 10]$

Beweisskizze.

$$\Pr[M > 10] = 1 - \Pr[X + Y \leq 10] \cdot \Pr[Z \leq 10]$$

$$\Pr[X + Y \leq 10] = 1 - \Pr[X + Y = 11] = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{11}$$

$$\Pr[Z \leq 10] = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

Lösung zu Aufgabe 2(a)

$X + Y \sim \mathrm{Bin}(11, 7/8)$, $Z \sim \mathrm{Geo}(1/4)$, $M := \max\{X + Y, Z\}$

Aufgabe 2(a)

Bestimmen Sie $\Pr[M > 10]$

Beweisskizze.

$$\Pr[M > 10] = 1 - \Pr[X + Y \leq 10] \cdot \Pr[Z \leq 10]$$

$$\Pr[X + Y \leq 10] = 1 - \Pr[X + Y = 11] = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{11}$$

$$\Pr[Z \leq 10] = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$\Longrightarrow \qquad \Pr[M > 10] = 1 - \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{11}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right) \approx 0{,}2735$$

Lösung zu Aufgabe 2(b)

$X \sim \mathrm{Bin}(6, 7/8),\ Y \sim \mathrm{Bin}(5, 7/8),\ Z \sim \mathrm{Geo}(1/4),\ M := \max\{X + Y, Z\}$

Aufgabe 2(b)

Bestimmen Sie $\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6]$

Lösung zu Aufgabe 2(b)

$X \sim \mathrm{Bin}(6, 7/8),\ Y \sim \mathrm{Bin}(5, 7/8),\ Z \sim \mathrm{Geo}(1/4),\ M := \max\{X + Y, Z\}$

Aufgabe 2(b)

Bestimmen Sie $\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6]$

Beweisskizze.

$$\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6] = \frac{\Pr[M = 8, X \cdot Y = 6]}{\Pr[X \cdot Y = 6]}$$

Lösung zu Aufgabe 2(b)

$X \sim \text{Bin}(6, 7/8),\ Y \sim \text{Bin}(5, 7/8),\ Z \sim \text{Geo}(1/4),\ M := \max\{X + Y, Z\}$

Aufgabe 2(b)

Bestimmen Sie $\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6]$

Beweisskizze.

$$\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6] = \frac{\Pr[M = 8, X \cdot Y = 6]}{\Pr[X \cdot Y = 6]}$$

Beobachtung: Falls $X \cdot Y = 6$ gilt, dann ist $X + Y < 8$. Also:

$$\Pr[M = 8, X \cdot Y = 6] = \Pr[Z = 8, X \cdot Y = 6] = \Pr[Z = 8] \cdot \Pr[X \cdot Y = 6]$$

Lösung zu Aufgabe 2(b)

$X \sim \text{Bin}(6, 7/8)$, $Y \sim \text{Bin}(5, 7/8)$, $Z \sim \text{Geo}(1/4)$, $M := \max\{X + Y, Z\}$

Aufgabe 2(b)

Bestimmen Sie $\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6]$

Beweisskizze.

$$\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6] = \frac{\Pr[M = 8, X \cdot Y = 6]}{\Pr[X \cdot Y = 6]}$$

Beobachtung: Falls $X \cdot Y = 6$ gilt, dann ist $X + Y < 8$. Also:

$$\Pr[M = 8, X \cdot Y = 6] = \Pr[Z = 8, X \cdot Y = 6] = \Pr[Z = 8] \cdot \Pr[X \cdot Y = 6]$$

$$\implies \Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6] = \Pr[Z = 8] = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0{,}03337$$

Lösung zu Aufgabe 2(c)

$X \sim \text{Bin}(6, 7/8)$, $Z \sim \text{Geo}(1/4)$

Aufgabe 2(c)

Bestimmen sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so, dass für $K := \lambda \cdot X + \mu \cdot Z$ sowohl $\mathbb{E}[K] = 0$ als auch $\text{Var}[K] = 1$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 2(c)

$X \sim \mathrm{Bin}(6, 7/8)$, $Z \sim \mathrm{Geo}(1/4)$

Aufgabe 2(c)

Bestimmen sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so, dass für $K := \lambda \cdot X + \mu \cdot Z$ sowohl $\mathbb{E}[K] = 0$ als auch $\mathrm{Var}[K] = 1$ gilt.

Beweisskizze.

$$\mathbb{E}[K] = \frac{21}{4}\lambda + 4\mu \stackrel{!}{=} 0$$

Lösung zu Aufgabe 2(c)

$X \sim \mathrm{Bin}(6, 7/8)$, $Z \sim \mathrm{Geo}(1/4)$

Aufgabe 2(c)

Bestimmen sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so, dass für $K := \lambda \cdot X + \mu \cdot Z$ sowohl $\mathbb{E}[K] = 0$ als auch $\mathrm{Var}[K] = 1$ gilt.

Beweisskizze.

$$\mathbb{E}[K] = \frac{21}{4}\lambda + 4\mu \overset{!}{=} 0$$
$$\mathrm{Var}[K] = \frac{21}{32}\lambda^2 + 12\mu^2 \overset{!}{=} 1$$

Lösung zu Aufgabe 2(c)

$X \sim \mathrm{Bin}(6, 7/8)$, $Z \sim \mathrm{Geo}(1/4)$

Aufgabe 2(c)

Bestimmen sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so, dass für $K := \lambda \cdot X + \mu \cdot Z$ sowohl $\mathbb{E}[K] = 0$ als auch $\mathrm{Var}[K] = 1$ gilt.

Beweisskizze.

$$\mathbb{E}[K] = \frac{21}{4}\lambda + 4\mu \overset{!}{=} 0$$

$$\mathrm{Var}[K] = \frac{21}{32}\lambda^2 + 12\mu^2 \overset{!}{=} 1$$

$$\implies \lambda = \pm \frac{8}{\sqrt{21 \cdot 65}} \approx \pm 0{,}21653 \qquad \mu = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{65}} \approx \pm{,}284199$$

Erwartungswert ohne Dichte

Es seien U, V, W, Y, Z unabhängige Zufallsvariablen mit folgenden Verteilungen:

- $U \sim \exp(1/5)$.
- $V \sim \exp(2/3)$.
- W gleichverteilt auf $[1, 5]$.
- $Y \sim \mathcal{N}(-13, 1)$.
- $Z \sim \mathcal{N}(0, 5)$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den folgenden Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[(Z + \min(U + W, V + W)) \cdot (Y + Z)].$$