## 6.4 Entscheidbarkeit

| | Wortproblem | Leerheit | Äquivalenz | Schnittproblem |
|---|---|---|---|---|
| Typ 3 | ja | ja | ja | ja |
| DCFL | ja | ja | ja | nein (*) |
| Typ 2 | ja | ja | nein (*) | nein |
| Typ 1 | ja | nein (*) | nein | nein |
| Typ 0 | nein (*) | nein | nein | nein |

(*) Diese Ergebnisse werden im Abschnitt 3 des nächsten Kapitels gezeigt. Dass in jeder Spalte die darunterliegenden Einträge dann ebenfalls „nein“ sein müssen, ist klar.

# Kapitel II Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit

## 1. Der Begriff der Berechenbarkeit

Unsere Vorstellung ist:
$f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ ist berechenbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der $f$ berechnet, bzw, genauer, der bei jeder Eingabe $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ nach endlich vielen Schritten mit dem Ergebnis $f(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0$ hält.

Was bedeutet „Algorithmus“ an dieser Stelle?

AWK, B, C, Euler, Fortran, Haskell, Id, JAVA, Lisp, Modula, Oberon, Pascal, Simula, ...-Programme?
Gibt es einen Unterschied, wenn man sich auf eine bestimmte Programmiersprache beschränkt?

Analog für partielle Funktionen

$$f : \mathbb{N}_0^k \supseteq D \to \mathbb{N}_0$$

bedeutet berechenbar Folgendes:

1. Algorithmus hält nach endlich vielen Schritten mit dem richtigen Ergebnis, wenn $(n_1, \ldots, n_k) \in D$;
2. hält nicht, wenn $(n_1, \ldots, n_k) \notin D$.

## Beispiel 119

Wir definieren folgende Funktionen:

$$f_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ als Ziffernfolge Anfangsstück von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ interpretiert als Ziffernfolge in } \pi \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls mindestens } n \text{ aufeinanderfolgende Ziffern} \\ & \text{in } \pi \text{ gleich 1 sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$
Einige Beispiele sind damit:

$$f_1(314) = 1, f_1(415) = 0, f_2(415) = 1\ .$$

## Beispiel 119

$$f_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ als Ziffernfolge Anfangsstück von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie man leicht einsieht, ist $f_1$ berechenbar, denn um festzustellen, ob eine Ziffernfolge ein Anfangsstück von $\pi$ ist, muss $\pi$ nur auf entsprechend viele Dezimalstellen berechnet werden.

## Beispiel 119

$$f_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ interpretiert als Ziffernfolge in } \pi \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $f_2$ wissen wir nicht, ob es berechenbar ist. Um festzustellen, dass die Ziffernfolge in $\pi$ vorkommt, müsste man $\pi$ schrittweise immer genauer approximieren. Der Algorithmus würde stoppen, wenn die Ziffernfolge gefunden wird. Aber was ist, wenn die Ziffernfolge in $\pi$ nicht vorkommt?
Vielleicht gibt es aber einen (noch zu findenden) mathematischen Satz, der genaue Aussagen über die in $\pi$ vorkommenden Ziffernfolgen macht.
Wäre $\pi$ vollkommen zufällig, was es aber nicht ist, dann würde jedes $n$ als Ziffernfolge irgendwann vorkommen.

## Beispiel 119

$$f_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls mindestens } n \text{ aufeinanderfolgende Ziffern} \\ & \text{in } \pi \text{ gleich 1 sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$f_3$ ist berechenbar, denn $f_3 \equiv f_4$, mit

$$f_4(n) = \begin{cases} 1 & n < n_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die maximale Anzahl von aufeinanderfolgenden 1en in $\pi$ ist. Hierbei ist es nicht von Bedeutung, wie die Zahl $n_0$ berechnet werden kann - wichtig ist nur, dass eine solche Zahl $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ existiert.

**Hinweis:**
Viele interessante Informationen zur Kreiszahl $\pi$ findet man z.B. bei

- Wikipedia
- Yasumasa Kanada's Lab; diese Webseite enthält auch Angaben zur Verteilung der Ziffern in der (Dezimal-/Hexadezimal)-Bruchdarstellung von $\pi$.

Weitere Vorschläge, den Begriff der Berechenbarkeit zu präzisieren und zu formalisieren:

1. Turing-Berechenbarkeit
2. Markov-Algorithmen
3. $\lambda$-Kalkül
4. $\mu$-rekursive Funktionen
5. Registermaschinen
6. AWK, B, C, Euler, Fortran, Id, JAVA, Lisp, Modula, Oberon, Pascal, Simula, ...-Programme
7. while-Programme
8. goto-Programme
9. DNA-Algorithmen
10. Quantenalgorithmen
11. u.v.a.m.

Es wurde bewiesen: Alle diese Beschreibungsmethoden sind in ihrer Mächtigkeit äquivalent.

**Church'sche These**
Dieser formale Begriff der Berechenbarkeit stimmt mit dem intuitiven überein.

## 1.1 Turing-Berechenbarkeit

Definition 120
Eine (partielle) Funktion

$$f : \mathbb{N}_0^k \supseteq D \to \mathbb{N}_0$$

heißt Turing-berechenbar, falls es eine deterministische Turingmaschine gibt, die für jede Eingabe $(n_1, \ldots, n_k) \in D$ nach endlich vielen Schritten mit dem Bandinhalt

$$f(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0$$

hält. Falls $(n_1, \ldots, n_k) \notin D$, hält die Turingmaschine nicht!

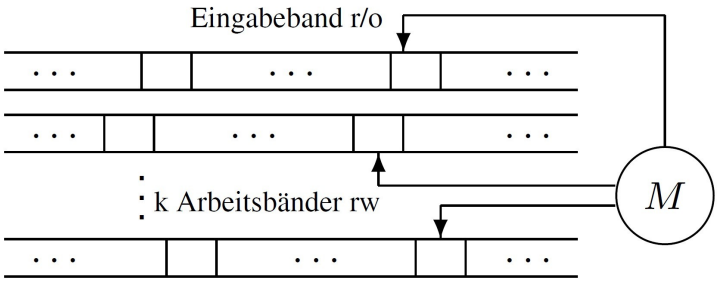
Dabei nehmen wir an, dass Tupel wie $(n_1, \ldots, n_k)$ geeignet codiert auf dem Band der Turingmaschine dargestellt werden.

Eine beliebte Modellvariante ist die $k$-Band-Turingmaschine, die statt einem Band $k$, $k \geq 1$, Arbeitsbänder zur Verfügung hat, deren Lese-/Schreibköpfe sie unabhängig voneinander bewegen kann.

Oft existiert auch ein spezielles Eingabeband, das nur gelesen, aber nicht geschrieben werden kann (read-only). Der Lesekopf kann jedoch normalerweise in beiden Richtungen bewegt werden.

Ebenso wird oft ein spezielles Ausgabeband verwendet, das nur geschrieben, aber nicht gelesen werden kann (write-only). Der Schreibkopf kann dabei nur nach rechts bewegt werden.

## Beispiel 121 ($k$-Band-Turingmaschine)



## Satz 122

*Jede $k$-Band-Turingmaschine kann effektiv durch eine 1-Band-TM simuliert werden.*

## Beweis:

Wir simulieren die $k$ Bänder auf $k$ Spuren eines Bandes, wobei wir das Teilalphabet für jede Spur auch noch so erweitern, dass die Kopfposition des simulierten Bandes mit gespeichert werden kann.

**Definition 123**

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt rekursiv oder entscheidbar, falls es eine deterministische TM $M$ gibt, die auf allen Eingaben $\in \Sigma^*$ hält und $A$ erkennt.

**Definition 124**

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt rekursiv aufzählbar (r.a.) oder semi-entscheidbar, falls es eine TM $N$ gibt, für die

$$L(N) = A\,,$$

also, falls $A$ Chomsky-0 ist.

## Definition 125

Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Die charakteristische Funktion $\chi_A$ von $A$ ist

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## Definition 126

Sei $A \subseteq \Sigma^*$. $\chi'_A$ ist definiert durch

$$\chi'_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

**Satz 127**

*$A$ ist rekursiv $\Leftrightarrow$ $\chi_A$ ist berechenbar.*

**Beweis:**

Folgt aus der Definition von rekursiv: es gibt eine TM, die `ja` oder `nein` liefert. Wandle das Ergebnis in 1 oder 0.

## Satz 128

*$A$ ist rekursiv aufzählbar $\Leftrightarrow$ $\chi'_A$ ist berechenbar.*

## Beweis:

Folgt unmittelbar aus der Definition.

## Satz 129

*$A$ ist rekursiv $\Leftrightarrow$ $\chi'_A$ und $\chi'_{\bar{A}}$ sind berechenbar ($\Leftrightarrow$ $A$ und $\bar{A}$ sind r.a.)*

## Beweis:

Nur $\Leftarrow$ ist nichttrivial. Wir lassen hier eine TM für $A$ und eine TM für $\bar{A}$ Schritt für Schritt parallel laufen.