SS 2015

Zentralübung zur Vorlesung Theoretische Informatik

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2015SS/theo/uebung/

16. April 2015

ZÜ I

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Organisation der ZÜ Ziele der ZÜ
2. Themen	Hüllenoperationen Abzählbarkeit
3. Hin.Ti's	HA von Blatt 1
4. Vorbereitung	TA von Blatt 1

1. Übungsbetrieb

1.1 Organisation der Zentralübung

- Zeit: Do 14.30–15.55 Ort: MI HS1 F.L. Bauer

  Ausnahmen:
  Siehe Termine auf der Übungswebseite.

- Webseite:
  http://www14.in.tum.de/lehre/2015SS/theo/uebung/

- Kontakt Dr. W. Meixner:
  - Epost: meixner@in.tum.de
  - Telefon: 089 289 17713
  - Raum: MI 03.09.040
  - Sprechstunde: n.V. Donnerstag 12 - 12.30 Uhr
- Material:
  - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
  - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie
  - ttt-Aufzeichnung
  - Hin.Ti's

1.2 Ziele der Zentralübung

Diese sind: Spezielle und Allgemeine didaktische Ziele im Sinne einer Verstärkung des Erfolges beim Studium der THEO.

Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor- bzw. Hausaufgaben der THEO Übungsblätter.
- **Persönliche Kommunikation**

Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Informelle **Metasprache** und übergeordnete **Interpretation**
- **Thema der Woche**.

2. Themen

Grundlegende Themen der theoretischen Informatik sind
Berechenbarkeit und
Abgrenzung der Größenordnung von Problemen.

Hüllenoperationen und Abzählbarkeit gehören zu diesen Themen.

Insbesondere die Beweismethode der sogenannten strukturellen Induktion gehören zum Thema Hüllenoperationen und andererseits gehören rekursive Aufzählbarkeit zum Thema Abzählbarkeit.

2.1 Hüllenoperationen

Hausaufgabe 1 beginnt damit, Durchschnitte von Mengen zu analysieren,
die gegenüber der Anwendung von Regeln abgeschlossen sind.

Eine Menge U nennen wir *abgeschlossen* gegenüber 2-Tupelbildung, falls die folgende Implikation $A2$ gilt:

$$(A2) \qquad x, y \in U \Longrightarrow (x, y) \in U\,.$$

Abgeschlossenheit gegenüber der Ausführung einer Operation ist ein bedeutender Begriff in der theoretischen Informatik, der Maßtheorie (DWT), und auch in der Mathematik insgesamt.

Das Thema nennt sich „Hüllenbildung" bzw. „Hüllenoperationen"

Berechenbarkeitsbegriffe beruhen auf endlichen Regelsystemen, deren Regeln einzeln effektiv angewendet werden können, um Elemente zu erzeugen bzw. zu benennen.

Insgesamt werden dadurch induktiv
Mengen dargestellt bzw. erzeugt.

Formal werden die erzeugten Mengen
als Durchschnitt aller Mengen dargestellt,
die in gewissem Sinne abgeschlossen sind gegenüber der
Erzeugung von Elementen.

Beispiel 1

Grundlegendes Beispiel ist die Erzeugung von Darstellungen von natürlichen Zahlen, bei der es eine Regel gibt, die es erlaubt, an eine schon erzeugte Zahldarstellung durch Anfügen eines Striches die nachfolgende Zahl darzustellen.

Als Startregel kann man das Hinschreiben eines einzelnen Striches zur Darstellung der Zahl 1 betrachten.

Die Menge der natürlichen Zahlen wird dann als
kleinste, gegenüber der Regelanwendung abgeschlossenen Menge dargestellt.

Beispiel 2

Erzeugung von Mengen nach HA 1

Sei M eine Menge. Wir definieren

1. $S_0 := M \quad$ und $\quad S_{i+1} := S_i \cup (S_i \times S_i) \quad$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$,
2. $M^{\times 2} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} S_i$.

Bemerkung

Man nennt $M^{\times 2}$ die gegenüber 2-Tupelbildung abgeschlossene Hülle von M. Sie besitzt zwei Darstellungen:

$$M^{\times 2} = \bigcap_{(U \supseteq M,\ U \text{ erfüllt } A2)} U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} S_i\,. \qquad \text{(Def. } S_i \text{ siehe 2a)}$$

Es gilt:

$M^{\times 2}$ ist die bezüglich Mengeninklusion kleinste,
gegenüber 2-Tupelbildung abgeschlossene Menge U,
die M umfasst, d.h., dass $M \subseteq U$ gilt.

Struktur des Beweises:

Zu beweisen ist:

1. $M \subseteq M^{\times 2}$.
2. $M^{\times 2}$ ist abgeschlossen gegen der Ausführung der Regel $(A1)$.
3. U abgeschlossen und $M \subseteq U \implies M^{\times 2} \subseteq U$.

2.2 Abzählbarkeit

Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie
entweder endlich ist oder wenn
beide M und $\mathbb{N}$ bijektiv aufeinander abgebildet werden können.

Dies ist gleichbedeutend damit, dass eine bijektive Funktion $f : M \to \mathbb{N}$ oder eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ existiert.

Eine injektive Funktion $f : M \to \mathbb{N}$ heißt Nummerierung von M.

Eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ heißt Auflistung von M.

Falls M nicht endlich ist, dann gilt:

Es existiert eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$

genau dann, wenn

es existiert eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$

genau dann, wenn

es existiert eine injektive Funktion $f : M \to \mathbb{N}$.

genau dann, wenn

es existiert eine bijektive Funktion $f : M \to \mathbb{N}$. .

Beweise

1. Auflistung $\Longrightarrow$ Nummerierung:

Sei $f : \mathbb{N} \to M$ eine (surjektive) Auflistung von M.

Wir definieren $g : M \to \mathbb{N}$ durch

$$g(m) = \min f^{-1}(m)\,.$$

Dann ist g eine Nummerierung von M.

2. Nummerierung $\Longrightarrow$ Auflistung:

Sei $f : M \to \mathbb{N}$ eine (injektive) Nummerierung von M.

Seien $M_1 := M$ und M_1 sei nicht endlich.

Für alle $i \in \mathbb{N}$ gelte

$$g(i) = f^{-1}(\min f(M_i)) \quad \text{und} \quad M_{i+1} := M_i \setminus \{g(i)\}\,.$$

Da $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i = \emptyset$, folgt $g : \mathbb{N} \to M$ surjektiv.
g ist eine Auflistung von M.

Q.e.d.

3. Hin.Ti's zu HA von Blatt 1

Die Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben der THEO-Übungsblätter sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 1:

Der Mathematiker kennt geordnete Tupel.

Was aber ist ein Wort über einem Alphabet, mengentheoretisch betrachtet?

In dieser Aufgabe zusammen mit der Zusatzaufgabe 1 wird die Beziehung der Tupelstrukturen mit den Wortstrukturen dargestellt.

In dieser Aufgabe wird aber auch begonnen, Durchschnitte von Mengen,
die gegenüber der Anwendung von Regeln abgeschlossen sind,
zu analysieren.

Das Thema nennt sich „Hüllenbildung“

ad HA 2:

2.1: Die Menge Σ^* ist abzählbar:

Man kann eine Nummerierung $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ aus der folgenden Überlegung heraus entwickeln.

Es gelten für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichungen $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n = 2^n$.

Aufsummierung ergibt mit Hilfe der geometrischen Formel eine Idee für eine Nummerierung von Σ^*.

4. Vorbereitung TA Blatt 1

Induzieren von Operationen

Sei $(A, \circ)$ eine Algebra.
Dann ist $(\mathcal{P}(A), \circ')$ eine Algebra mit den folgenden Definitionen:

Seien $M, N \subseteq A$.
Dann heißt $\circ'$ die von $\circ$ auf Teilmengen von A induzierte Operation, wobei gilt:

$$M \circ' N := \{m \circ n\,;\, m \in M, n \in N\}.$$

Kurzschreibweisen: In bekanntem Kontext werden für $M \circ' N$ meist die Kurzschreibweisen $M \circ N$ oder MN verwendet.

4.1 VA 1

1. Seien $A = \{\epsilon, a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$.
   Bestimmen Sie $|A^2|$, $|AB|$ und $|BA|$.

2. Seien $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ mit $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$. Zeigen Sie

   $$AB \subseteq CD\,.$$

   Erinnerung: Eine Teilmengenbeziehung $M \subseteq N$ zeigt man, indem man ein $w \in M$ annimmt und dann zeigt, dass $w \in N$ folgt.

1. Seien $A = \{\epsilon, a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$.
   Bestimmen Sie $|A^2|$, $|AB|$ und $|BA|$.

Lösung

$$|A^2| = |\{\epsilon, a, ab\}\{\epsilon, a, ab\}| = |\{\epsilon, a, ab, a^2, a^2b, aba, abab\}| = 7\,.$$

$$|AB| = |\{\epsilon, a, ab\}\{a, ba\}| = |\{a, ba, a^2, aba, ab^2a\}| = 5\,.$$

$$|BA| = |\{a, ba\}\{\epsilon, a, ab\}| = |\{a, a^2, a^2b, ba, ba^2, ba^2b\}| = 6\,.$$

2. Seien $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ mit $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$. Zeigen Sie

$$AB \subseteq CD\,.$$

Lösung

Sei $w \in AB$.

Dann muss w aus zwei Teilwörtern u, v bestehen, also $w = uv$ mit $u \in A$ und $v \in B$.

Nach Voraussetzung ist dann auch $u \in C$ und $v \in D$.

Somit ist $w = uv \in CD$.

4.2 VA 2

Seien Σ ein Alphabet und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ formale Sprachen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. (i) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$.

   (ii) $B \subseteq C \Longrightarrow AB \subseteq AC$.

   Hinweis: Es handelt sich hier um zwei äquivalente Monotonieeigenschaften.

2. $A \subseteq B \Longrightarrow A^n \subseteq B^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
3. $A \subseteq B \Longrightarrow A^* \subseteq B^*$.

Lösung 1 (i):

Aus $w \in A(B \cap C)$ folgt $w = uv$
für gewisse u, v mit $u \in A$ und $v \in (B \cap C)$.

Damit folgt $uv \in AB$ und $uv \in AC$, d.h. $w \in AB \cap AC$.

Lösung 1 (ii):

Zum Beweis benutzen wir (i) wie folgt.

Sei $B \subseteq C$. Dann folgt

$AB = A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC \subseteq AC$.

Bemerkung

Umgekehrt kann man zunächst (ii) beweisen und daraus (i) ableiten. D.h., dass (i) und (ii) die gleiche Aussagekraft besitzen und in diesem Sinne äquivalent sind. Beides sind „Monotonieeigenschaften“.

2. $A \subseteq B \Longrightarrow A^n \subseteq B^n \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösung 2:

Wir nehmen die Prämisse $A \subseteq B$ an und beweisen die Aussage $A^n \subseteq B^n$ durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

$\underline{n = 0}$: Es gilt $A^0 = \{\epsilon\} \subseteq \{\epsilon\} = B^0$.

$\underline{n \to n+1}$: Wir nehmen $A^n \subseteq B^n$ als bewiesen an.

Dann gilt $A^{n+1} = \underbrace{AA^n \subseteq BB^n}_{\text{da } A \subseteq B \text{ und } A^n \subseteq B^n} = B^{n+1}$.

Hier haben wir eine Monotoniebeziehung VA 1 oder aus Teilaufgabe 1 von VA 2 verwendet.

3. $A \subseteq B \Longrightarrow A^* \subseteq B^*$.

Lösung 3:

Sei $A \subseteq B$.
Nach Definition gilt $A^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A^n$. Wir zeigen $x \in A^* \Longrightarrow x \in B^*$.

Für ein $x \in A^*$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $x \in A^n$.

Mit Teilaufgabe 2 folgt $x \in B^n \subseteq B^*$.

4.3 VA 3

In Lemma 1.7 der Vorlesung wird gezeigt, dass Σ^* abzählbar ist. Ist dann jede Teilmenge von Σ^* ebenfalls abzählbar? Beweis!

Lösung

Tatsächlich gilt, dass jede Teilmenge L von Σ^* abzählbar ist.

Sei $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ eine Bijektion von Σ^* auf $\mathbb{N}$.

Sei $id : L \to \Sigma^*$ die identische Abbildung $id(x) = x$.

Dann ist die Komposition $g = f \circ id$ eine injektive Abbildung von L in $\mathbb{N}$.

Wir definieren eine bijektive Auflistung $h : \mathbb{N} \to L$, wie folgt.

Seien $M_1 := g(L)$ und M_1 sei nicht endlich.

Für alle $i \in \mathbb{N}$ gelte

$$h(i) = f^{-1}(\min M_i) \quad \text{und} \quad M_{i+1} := M_i \setminus \{h(i)\} \,.$$

Da $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \emptyset$, folgt h surjektiv.

h ist injektiv, weil Minima nicht mehrmals auftreten können.

Q.e.d.

4.4 VA 4

Betrachten Sie die Phrasenstrukturgrammatik
$G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to ab, S \to aSb\}, S)$.

1. Geben Sie $L(G)$ an.
2. Geben Sie eine Grammatik $G' = (V', \Sigma', P', S')$ mit $L(G') = L(G)$ an, deren Regeln die Form $A \to x$ oder $A \to xB$ oder $A \to By$ haben, wobei $A, B \in V'$ und $x, y \in \Sigma'$ seien.
3. Beweisen Sie $L(G') = L(G)$.

Thema dieser Aufgabe ist u. a. die Tatsache, dass man bereits durch Mischung von rechtslinearen und linkslinearen Produktionen nicht-reguläre Sprachen erzeugen kann.

Thema sind aber auch Techniken zum Beweis der Gleichheit von erzeugten Sprachen.

Aufgabe

Geben Sie $L(G)$ an (als eine Auflistung).

Lösung

Durch $n \geq 0$-malige Anwendung der rekursiven Regel $S \rightarrow aSb$ und abschließender Anwendung von $S \rightarrow ab$ erhalten wir

$$S \underset{G}{\rightarrow} aSb \underset{G}{\rightarrow} aaSbb \underset{G}{\rightarrow} \ldots \underset{G}{\rightarrow} a^n S b^n \underset{G}{\rightarrow} a^{n+1} b^{n+1} .$$

Da alle Ableitungen diese Form haben müssen, gilt
$L(G) = \{a^n b^n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe

Geben Sie eine Grammatik $G' = (V', \Sigma', P', S')$ mit $L(G') = L(G)$ an, deren Regeln die Form $A \to x$ oder $A \to xBy$ haben, wobei $A, B \in V'$ und $x, y \in \Sigma'$ seien mit $|xy| \leq 1$.

Lösung

In einer Grammatik $G' = (\{S, A\}, \Sigma, P', S)$ simulieren bzw. ersetzen wir $S \to aSb$ durch $S \to aA$ und $A \to Sb$.

Die Regel $S \to ab$ wird ersetzt durch $S \to aB$ zusammen mit $B \to b$.

Aufgabe

Beweisen Sie $L(G') = L(G)$.

Lösung

Offensichtlich gilt $S \underset{G'}{\rightarrow} aA \underset{G'}{\rightarrow} aSb$, also $S \underset{G'}{\rightarrow}^* aSb$. Entsprechendes gilt für $S \underset{G'}{\rightarrow}^* ab$.
Damit sind wieder alle Produktionen aus P durch Ableitungen mit Produktionen aus P' darstellbar. Daraus folgt $L(G) \subseteq L(G')$.

Zum Beweis der umgekehrten Mengeninklusion betrachten wir Ableitungen von $w \in L(G')$

$$S \underset{G'}{\rightarrow} \alpha_1 \underset{G'}{\rightarrow} \alpha_2 \underset{G'}{\rightarrow} \ldots \underset{G'}{\rightarrow} \alpha_n = w\,.$$

Wir beobachten zunächst, dass jede aus S mit G' ableitbare Satzform α_i stets höchstens 1 Variable enthält, und zwar entweder A, B oder S.

Die Variable A kann aber nur unmittelbar nach ihrer Einführung durch die Ersetzung $A \underset{G'}{\rightarrow} Sb$ wieder beseitigt worden sein, wenn ein Terminalwort w abgeleitet wird.

Wenn also ein A durch Anwendung einer Produktion auf α_{i-1} in α_i entstanden ist, dann folgt für geeignete Satzformen u, v stets

$$\alpha_{i-1} = uSv \underset{G'}{\rightarrow} uaAv \underset{G'}{\rightarrow} uaSbv = \alpha_{i+1}.$$

Offensichtlich also ist A eliminierbar durch eine Ableitung in G wie folgt.

$$\alpha_{i-1} = uSv \underset{G}{\rightarrow} uaSbv = \alpha_{i+1}\,.$$

Die abschließende Beseitigung des B mit $S \underset{G}{\rightarrow}^* ab$ ist klar.
Daraus folgt $L(G') \subseteq L(G)$.