
Theoretische Informatik

Abgabetermin: 11. Mai 2015, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Für beliebige Sprachen $R, L \subseteq \Sigma^*$ ist der Rechtsquotient R/L definiert durch

$$R/L := \{x \in \Sigma^* ; (\exists y \in L)[xy \in R]\}.$$

Hinweis: Wenden Sie im Folgenden wenn möglich bekannte Sätze an.

1. Seien $R \subseteq \Sigma^*$ und $R_{-2} = \{x \in \Sigma^* ; (\exists y \in \Sigma^*)[|y| = 2 \wedge xy \in R]\}$. Man zeige:
Falls R regulär ist, dann ist auch R_{-2} regulär.
2. Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat, der die Sprache $R := L(A)$ akzeptiert.
Beschreiben Sie explizit, ausgehend von A , einen DFA oder NFA $A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$, der R_{-2} akzeptiert.
3. Seien $L \subseteq \Sigma^*$ beliebig und $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Zeigen Sie die Entscheidbarkeit von R/L .

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antwort:

1. Gibt es endliche, nicht kontextfreie Sprachen?
2. Ist die Sprache $\{a^m b^n \mid m < n\}$ kontextfrei?
3. Welche endliche Sprache beschreibt die Grammatik mit den Produktionen $S \rightarrow aS \mid bB$ und $B \rightarrow bBb$?
4. Wie viele DFA mit Zustandsmenge $\{a\}$ und Eingabealphabet $\{0\}$ gibt es?
5. Wie viele NFA mit Zustandsmenge $\{a\}$ und Eingabealphabet $\{0\}$ gibt es?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ bestehe aus allen Wörtern w , so dass jedes Zeichen b und c höchstens zwischen den Zeichen a auftritt. (D.h. $acababa \in L, acbaba \notin L$.)

1. Geben Sie einen NFA A an, der L akzeptiert.
2. Nun sei $N = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, F)$ ein beliebiger NFA über $\Sigma = \{a, b, c\}$. Wir definieren $L'(N)$ als Menge aller Wörter, die man erhält, wenn man in einem Wort aus $L(N)$ alle Vorkommen von a durch das leere Wort ϵ ersetzt und die übrigen Buchstaben unverändert lässt.

Konstruieren Sie einen NFA N' , so dass $L(N') = L'(N)$ gilt.

3. Verifizieren Sie Ihre Konstruktion, indem Sie zu A den entsprechenden Automaten A' berechnen und dann möglichst vereinfachen.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten die Sprache L aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die mit 00 beginnen, wenn sie mit 00 enden, und mit 11 beginnen, wenn sie mit 11 enden.

Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der L akzeptiert.

Hinweis: Beachten Sie, dass L z. B. das Wort 0001 enthält.

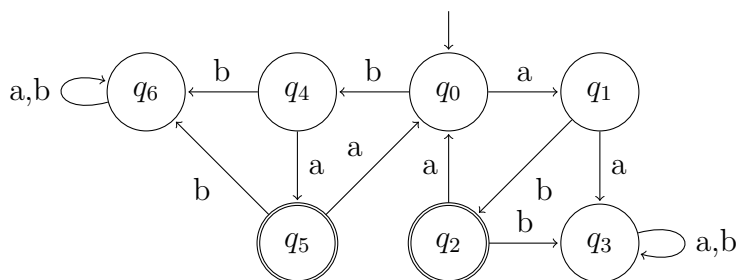
Hinweis: Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.

Vorbereitung 1

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Vorbereitung 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Der Automat M sei durch das folgende Diagramm gegeben. Zeigen Sie $q_3 \not\equiv_M q_4$ und $q_3 \equiv_M q_6$.



Vorbereitung 3

Wir nennen eine Phrasenstrukturgrammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ *nullierbar kontextfrei*, wenn alle Regeln aus P die Form $A \xrightarrow{p} \alpha$ mit $A \in V$, $\alpha \in \Gamma^*$ und $\Gamma = V \cup \Sigma$ besitzen. Γ^* heißt Menge der Satzformen über dem Vokabular Γ . Sei G eine nullierbar kontextfreie Grammatik.

1. Man zeige für alle $u, v, w \in \Gamma^*$ die Zerlegungseigenschaft

$$uv \xrightarrow{G} w \implies (\exists u', v' \in \Gamma^*) [u \xrightarrow{G} u' \wedge v \xrightarrow{G} v' \wedge u'v' = w].$$

2. Es gilt für alle $u, v \in \Gamma^*$, $a \in \Sigma$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$uv \xrightarrow{G} a^n \implies (\exists p, q \in \mathbb{N}_0) [p + q = n \wedge u \xrightarrow{G} a^p \wedge v \xrightarrow{G} a^q].$$

Vorbereitung 4

Welche Symbole einer durch die folgenden Produktionen gegebenen Grammatik sind erzeugend, welche erreichbar, und welche nützlich?

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow A \mid a, \\
 A &\rightarrow BC, & B &\rightarrow AE \mid C, \\
 C &\rightarrow aS, & D &\rightarrow aB \mid FS \\
 E &\rightarrow EA, & F &\rightarrow Ca \mid a.
 \end{aligned}$$

Tutoraufgabe 1

1. Sei $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$.
Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{ab^{2^i}cd^ie; i \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.
2. Sei $\Sigma = \{1\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $P = \{1^p; p \text{ prim}\}$ nicht regulär ist.

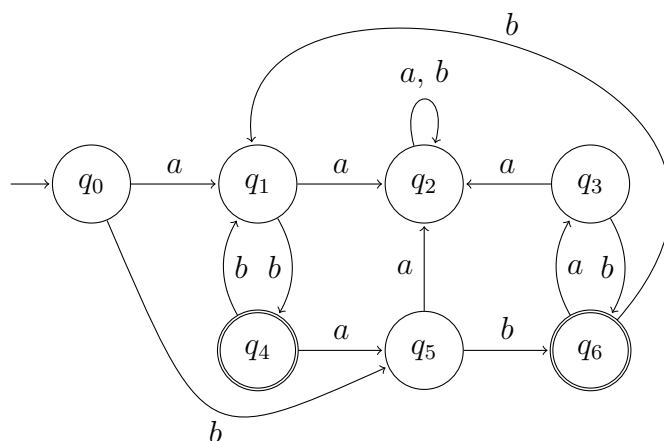
Tutoraufgabe 2 (Induzierte Äquivalenz)

Sei $R = L(a^*b^*)$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzbeziehungen:

$$aa \equiv_R \epsilon, \quad ab \equiv_R aa, \quad aba \equiv_R abba, \quad aba \equiv_R \epsilon.$$

Tutoraufgabe 3 (Quotientenautomat)

Wir betrachten den folgenden deterministischen Automaten mit Alphabet $\{a, b\}$.



Verwenden Sie das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren, um diesen Automaten zu minimieren. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Stellen Sie die Tabelle aus der Vorlesung auf und geben Sie zu jedem unterscheidbaren Paar von Zuständen an, mit welchem Zeichen (oder ϵ) sie unterschieden werden können.
2. Verwenden Sie die aufgestellte Tabelle, um den Quotientenautomaten zu konstruieren.

Tutoraufgabe 4 (CNF)

Wandeln Sie die durch folgende Produktionen gegebene Grammatik mit Startsymbol S in Chomsky-Normalform um:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0A0 \mid 1B1 \mid BB, \\ A &\rightarrow D, \quad B \rightarrow S \mid A, \\ C &\rightarrow S \mid \epsilon, \quad D \rightarrow C. \end{aligned}$$